

# Mathématique Élémentaire

## Examen

(21 août 2013)

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Veillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit  $A$  la proposition : « Si  $\sqrt{3}$  est rationnel, alors  $1 + \sqrt{3}$  est rationnel ».

/4

(a) Donnez (en bon français) la contraposée de la proposition  $A$ .

(b) Donnez (en bon français) la négation de la proposition  $A$ .

Question 2. Calculez

/3

■  $|3 + i| + |3 + i|^2$

■  $(5 - i)^{-1}$

■  $\frac{3 + i}{(3 - i)^{-1}}$

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 3. Esquissez les graphes des fonctions suivantes. Il est important d'expliquer brièvement les principales étapes qui mènent à vos graphiques (un tableau de valeurs n'est pas une justification complète).

/6

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{1-x^2},$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1+x^2}{1-x},$$

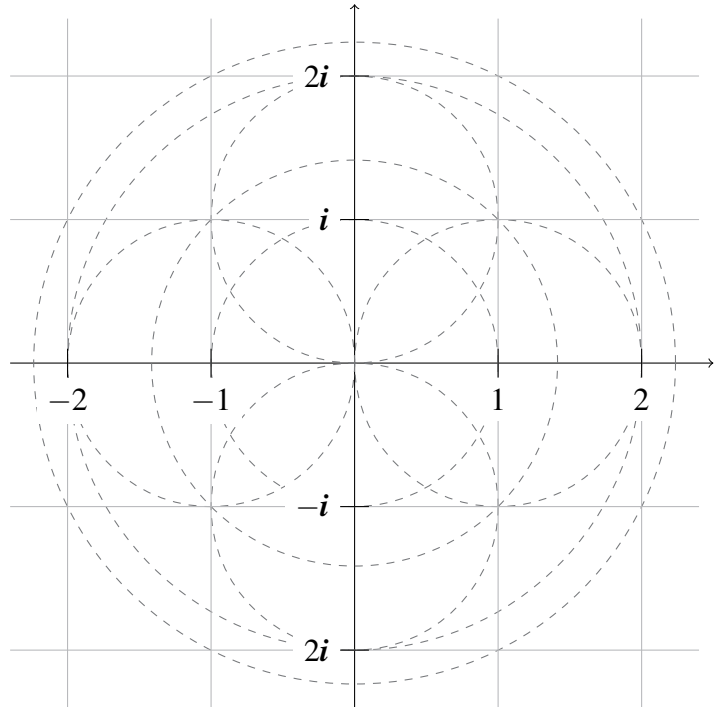
$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\ln x}{x}.$$

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4. Calculez, dans  $\mathbb{C}$ , sous forme trigonométrique et sous forme algébrique, les solutions de l'équation

$$X^3 + 1 = 0 \tag{1}$$

Représentez ces solutions sur le graphe ci-dessous. Justifiez vos calculs.



/4

Question 4 (suite). Poursuivez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.

Question 5. Calculez

■  $\sum_{v=-3}^j v(v+2) =$

/5

■  $\sum_{k=4}^n 4 =$

■  $\sum_{k=0}^t \sum_{\ell=0}^t (k^2 - \ell^2 + 1) =$

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

/5

Question 6. Les relations ci-dessous sont-elles des fonctions ? Lorsque vous répondez positivement, donnez le domaine et l'image de la fonction.

(a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{D} : (\beta, \gamma) \mapsto D$  tel que  $D$  est la droite d'équation  $x + \beta y = \gamma$ . Le symbole  $\mathcal{D}$  représente l'ensemble des droites du plan de coordonnées  $(x, y)$ .

(b)  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto w$  tel que  $w^3 = z$ .

Question 7.

/5

(a) Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Définissez «  $B$  est l'inverse de  $A$  ».

(b) Soit la matrice  $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  où  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ . Dites sous quelle condition la matrice  $S$  est inversible. Donnez alors l'inverse de  $S$  et vérifiez votre réponse en utilisant le point précédent.

(c) Résolvez le système suivant en fonction de  $\theta \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} \cos \theta x - \sin \theta y = 1 \\ \sin \theta x + \cos \theta y = 1 \end{cases}$$

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 8. Prouvez de manière algébrique que, quel que soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{si } |x| \leq |x + 1| \text{ et } |x| \leq |x - 1|, \text{ alors } |x| \leq 1/2.$$

/4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9. La proposition suivante est-elle une tautologie ?

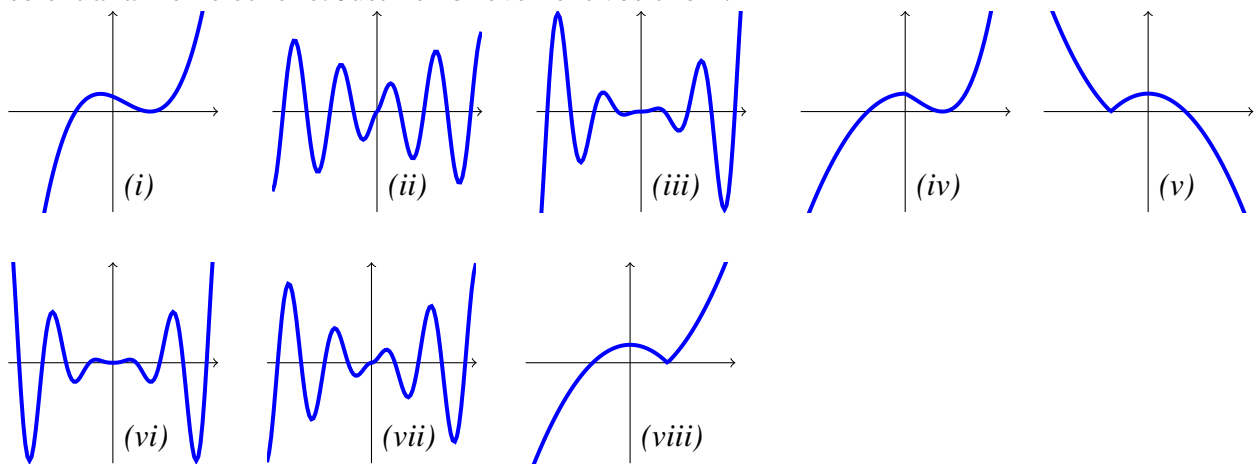
/3

$$(P \Rightarrow (\neg Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow R)$$

Justifiez votre réponse.

Question 10. Parmi les graphes ci dessous, repérez ceux des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 \sin x$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x - 5|(x + 5)$ . Il n'y a aucune garantie que les axes et les différents graphes soient à la même échelle. Justifiez brièvement vos choix.

/4





Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 11.

/6

(a) Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Prouvez par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(1 - z) \sum_{k=0}^n z^k = 1 - z^{n+1}$ .

(b) Montrez que  $\sum_{k=0}^{n-1} \left( \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) = 0$ .

Question 12. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda + 1 & \lambda & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (a) Calculez le déterminant de  $A$ .
- (b) Calculez, si possible, l'inverse de  $A$  pour  $\lambda = 2$ .
- (c) Soit le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda + 1 & \lambda & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (2)$$

Résolvez ce système uniquement dans le cas où le déterminant de la matrice  $A$  est nul. Donnez l'ensemble des solutions et précisez s'il s'agit d'un système impossible, indéterminé,...

/7

# Mathématique Élémentaire

Examen

(21 août 2013)

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 12 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.