

Test Introductif (Math. Élé. & Informatique)

Test n° 1

(17 septembre 2012)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Veillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Il est nécessaire de justifier vos réponses de manière à ce que votre argumentation convainque le lecteur. En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse ! En effet, les questions sont corrigées par différentes personnes.

Question 1. Écrivez les expressions suivantes sous forme d'une fraction :

/2

■ $\frac{a}{b} + \frac{c}{x} =$

■ $\frac{a}{y} \cdot \frac{x}{b} =$

Question 2. Soit \mathcal{C} un cercle de centre O et soit deux points A, B sur \mathcal{C} de telle sorte que AOB ne soient pas alignés. Justifiez l'affirmation suivante : « le triangle AOB est *isocèle* ».

/2

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 3. Trouvez tous les nombres réels x qui satisfont l'équation suivante :

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{x^2 - 3x + 1}{x}$$

Justifiez toutes les étapes de vos calculs.

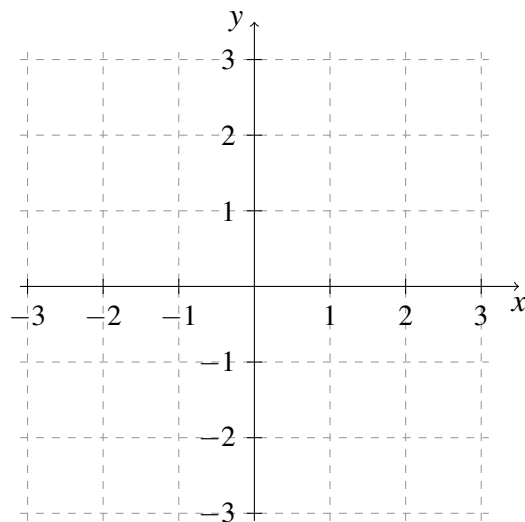
/4

Question 4. Dans le plan cartésien muni d'un repère orthonormé, on considère la courbe \mathcal{C} d'équation

/5

$$\mathcal{C} \equiv x + y + 1 = 0.$$

(a) Sur le graphique ci-dessous, tracez cette courbe \mathcal{C} .



(b) Parmi les points suivants, quels sont ceux qui appartiennent à la courbe \mathcal{C} . Justifiez vos réponses.

- $(0, 0)$
- $(2, -3)$
- $(-725, 721)$
- $(5\pi - 4, 3 - 5\pi)$

(c) Cette courbe a-t-elle des points d'intersection avec l'axe des x ? Si oui, donnez les tous (en expliquant). Si non, donnez un argument qui justifie cette non-intersection.

Question 5. Considérons la famille de fonctions

$$f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f_a(x) = e^{ax}$$

où $a \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de a la fonction f_a est-elle croissante ? Justifiez.

/3

Question 6. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est *dérivable en un point* $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe.}$$

En utilisant cette définition, montrez que la fonction $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$. Justifiez en détail.

/4

Question 7. Montrez que l'affirmation suivante est vraie :

« Quel que soit le réel x , on peut trouver un réel y tel que $y > x$. »

Détaillez votre raisonnement.

Montrez que l'affirmation suivante est fausse :

« Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x \cdot y = 1$. »

Détaillez votre raisonnement.

Question 8. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies (a et b sont des nombres réels) :

$\sqrt{a^2} = a$

$a^2 \leq |a|^2$

si $a \leq b$, alors $a^2 \leq b^2$

si $a^2 \leq b^2$, alors $a \leq b$

$|a + b| \leq |a| + |b|$

$\frac{|a|}{a} = 1$

$|a| \leq b$ si et seulement si $-b \leq a$ et $a \leq b$

$|\sin a| \leq 1$

$1/a \leq 1$

si $a \in]0, 1]$, alors $1/a \leq 1$

Choisissez une affirmation vraie et une fausse et justifiez votre réponse à ces deux affirmations.

/7

Question 9. Considérons une suite de cinquante nombres numérotés de 1 à 50. Ces nombres sont notés a_i avec i prenant des valeurs comprises entre 1 et 50.

Un *pic* est défini comme un élément plus grand que les deux éléments qui l'entourent ($a_{i-1} < a_i$ et $a_i > a_{i+1}$). On souhaiterait savoir si cette suite de 50 nombres comporte un pic et un seul.

On vous demande d'expliquer en français comment effectuer ce test. La personne à laquelle vous expliquez est censée être capable de réaliser les opérations arithmétiques élémentaires (+, -, ×, ÷) ainsi que des tests basés sur des comparaisons.

/5