Mathématiques Élémentaires

Test n° 2 (24 septembre 2012) **Correction**

Question 1. *Calculez*

- $(1+\boldsymbol{i})(4-\boldsymbol{i}) = 1\cdot 4+4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i}^2 = 5+3\boldsymbol{i}$
- *l'inverse de* $-\boldsymbol{i}$ *dans* $\mathbb{C}$ *:*

  On a vu au point précédent que $-\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}\cdot(-\boldsymbol{i}) = 1$. Donc, par définition de l'inverse d'un élément $z\in\mathbb{C}$, $-\boldsymbol{i}$ est l'inverse de $\boldsymbol{i}$ (symboliquement : $\boldsymbol{i}^{-1} = -\boldsymbol{i}$).

- *l'inverse de* $2-\boldsymbol{i}$ *dans* $\mathbb{C}$ *:*

  On a la formule générale $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ (valable si $|z|\neq 0$). Ici, $|2-\boldsymbol{i}| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$. Donc, par l'application de la formule, $(2-\boldsymbol{i})^{-1} = \frac{2+\boldsymbol{i}}{5} = \frac{2}{5}+\frac{1}{5}\boldsymbol{i}$.

- $|1+5\boldsymbol{i}| = \sqrt{1^2+5^2} = \sqrt{26}$

Question 2.

(a) *Soient* $x=(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ *et* $y=(y_1,y_2,\ldots,y_N)$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^N$*. Complétez les phrases suivantes :*

$x=y$ *si et seulement si* $\boxed{x_1=y_1 \text{ et } x_2=y_2 \text{ et } \ldots \text{ et } x_N=y_N}$

$x\neq y$ *si et seulement si* $\boxed{x_1\neq y_1 \text{ ou } x_2\neq y_2 \text{ ou } \ldots \text{ ou } x_N\neq y_N}$

(b) *L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifiez votre réponse.*

Vrai : ☒ *Faux :* ☐ *Il existe un réel* α *tel que* $(1,0,1)=\alpha(3,-6,9)+(0,2,-2)$.

L'affirmation est vraie. En utilisant la définition de la multiplication d'un vecteur par un réel, on cherche un réel α tel que

$$(1,0,1)=(3\alpha,-6\alpha,9\alpha)+(0,2,-2)$$

c'est-à-dire $(1,0,1)=(3\alpha,-6\alpha+2,9\alpha-2)$ par définition de l'addition de deux vecteurs.

Par le point (a), ces deux vecteurs sont égaux si et seulement si $1=3\alpha$ et $0=-6\alpha+2$ et $1=9\alpha-2$. La première égalité donne $\alpha=\frac{1}{3}$ et cette valeur satisfait également les deux autres égalités.

En effet, $-6\cdot\frac{1}{3}+2=-2+2=0$ et $9\cdot\frac{1}{3}-2=3-2=1$. L'affirmation est donc vraie. Il existe bien un réél α tel que $(1,0,1)=\alpha(3,-6,9)+(0,2,-2)$. Il suffit de prendre $\alpha=\frac{1}{3}$.

Question 3. *Prouvez que $2+\boldsymbol{i}$ est solution de l'équation $X^2-(1-\boldsymbol{i})X-5\boldsymbol{i}=0$.*

Par définition de la notion de solution, il suffit de substituer $2+\boldsymbol{i}$ à X et de vérifier que

$$(2+\boldsymbol{i})^2-(1-\boldsymbol{i})(2+\boldsymbol{i})-5\boldsymbol{i}=0.$$

En distribuant le premier membre, nous obtenons

$$\begin{aligned}(2+\boldsymbol{i})^2-(1-\boldsymbol{i})(2+\boldsymbol{i})-5\boldsymbol{i} &= (4+4\boldsymbol{i}-1)-2+2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i}-1-5\boldsymbol{i}\\ &= (4-1-2-1)+(4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{i})\\ &= 0+0\boldsymbol{i}.\end{aligned}$$

Ceci prouve donc notre assertion.

Question 4. *Prouvez que pour tout $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.*

Posons $z_1=a_1+b_1\boldsymbol{i}$ et $z_2=a_2+b_2\boldsymbol{i}$ où a_1, a_2, b_1, $b_2\in\mathbb{R}$. Par définition de la multiplication dans $\mathbb{C}$ et celle du conjugué, nous obtenons

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)\boldsymbol{i}}=(a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+b_1a_2)\boldsymbol{i}. \tag{1}$$

De même, par définition du conjugué suivie de celle de la multiplication dans $\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}&=(a_1-b_1\boldsymbol{i})\cdot(a_2-b_2\boldsymbol{i})=(a_1a_2-b_1b_2)+\big(a_1(-b_2)+(-b_1)a_2\big)\boldsymbol{i}\\ &=(a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+b_1a_2)\boldsymbol{i}.\end{aligned} \tag{2}$$

Par les égalités (1) et (2), nous obtenons bien la relation recherchée.

Question 5. *Résoudre en utilisant la méthode de l'équation auxiliaire :*

(a) $X^2-5X+6=0$ *;*

Commençons par calculer le discriminant $\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1$. Les solutions de l'équation auxiliaire $Y^2=\Delta$ sont $Y=1$ et $Y=-1$.

Par la méthode vue au cours, nous en concluons donc que les solutions de l'équation $X^2-5X+6=0$ sont $X=\frac{5+1}{2\cdot1}=3$ et $X=\frac{5-1}{2\cdot1}=2$.

(b) $3X^2-2\boldsymbol{i}X+5=0$.

De même, nous calculons $\Delta=(-2\boldsymbol{i})^2-4\cdot3\cdot5=-64$. Ensuite, nous résolvons l'équation auxiliaire $Y^2=-64$. Dans $\mathbb{C}$, cette équation auxiliaire a comme solutions $Y=8\boldsymbol{i}$ et $Y=-8\boldsymbol{i}$. Les solutions de l'équation de départ sont donc données par $X=\frac{2\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{i}}{6}=\frac{5}{3}\boldsymbol{i}$ et $X=\frac{2\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{i}}{6}=-\boldsymbol{i}$.

Question 6. *Déterminez l'ensemble des x qui vérifient l'inéquation* $\dfrac{x^2+x}{x^2-1} \leqslant 1$. *Détaillez et justifiez vos calculs.*

<u>*Première solution*</u> : En soustrayant 1 aux deux membres de l'inéquation, on obtient l'inéquation équivalente $\frac{x^2+x}{x^2-1} - 1 \leqslant 0$, ou encore

$$\frac{x+1}{x^2-1} \leqslant 0.$$

Pour déterminer le signe de la fraction, il suffit de déterminer le signe de son numérateur et de son dénominateur et d'appliquer les règles classiques rappelées au cours[1] :

		-1		1	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{x^2-1}$	$-$	/	$-$	/	$+$

Nous concluons donc que $\frac{x+1}{x^2-1} \leqslant 1$ si et seulement si $x < 1$ et $x \neq -1$ ou, de manière équivalente, si $x \in \,]-\infty, -1[\, \cup \,]-1, 1[$.

<u>*Seconde solution*</u> : Pour pouvoir multiplier les deux membres de l'inéquation par x^2-1, il faut connaitre le signe de cette dernière expression. Comme ses racines sont ± 1, les résultats rappelés au cours donnent le tableau de signes suivant :

		-1		1	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

Par conséquent, nous distinguons deux cas[1].

- $x \in \,]-\infty, -1[\, \cup \,]1, +\infty[$. Pour ces x, l'inéquation est équivalente à $x^2 + x \leqslant x^2 - 1$, ou encore $x \leqslant -1$. Il faut donc sélectionner les $x \leqslant -1$ parmi ceux avec lesquels on travaille, ce qui donne au final $x \in \,]-\infty, -1[$.
- $x \in \,]-1, 1[$. Pour ces x, l'inéquation devient $x^2 + x \geqslant x^2 - 1$, c'est-à-dire $x \geqslant -1$. Comme c'est le cas pour tous les x avec lesquels on travaille, ils sont tous des solutions de l'inéquation initiale.

En rassemblant les solutions trouvées dans chancun des cas, on obtient que l'ensemble des solutions de $\frac{x^2+x}{x^2-1} \leqslant 1$ est formé des $x \in \,]-\infty, -1[\, \cup \,]-1, 1[$.

[1]Les valeurs -1 et 1 sont celles qui annulent le dénominateur. Elles doivent être exclues car la fraction n'a aucun sens pour ces valeurs de x.

Question 7. *Soit la droite D passant par les points* $(4,-1)$ *et* $(-5,-3)$.

(a) *Donnez une équation paramétrique de D et la pente de D. Expliquez votre démarche.*

Nous connaissons un point de D, prenons par exemple $(4,-1)$. D'autre part, un vecteur directeur de D est $(-5-4,-3+1) = (-9,-2)$. Donc, une équation paramétrique de D est

$$(x,y) = (4,-1) + \lambda \cdot (-9,-2)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) *Donnez un vecteur directeur de D dont la norme vaut* 1.

On a vu au cours que si v est un vecteur non nul alors $\frac{v}{\|v\|}$ est de norme 1. Par (a), $(9,-2)$ est un vecteur directeur de D.

De plus, $\|(-9,-2)\| = \sqrt{(-9)^2+(-2)^2} = \sqrt{81+4} = \sqrt{85}$. Donc, un vecteur directeur de D dont la norme vaut 1 sera $\frac{1}{\sqrt{85}} \cdot (-9,-2) = \frac{\sqrt{85}}{85} \cdot (-9,-2) = \left(\frac{-9\sqrt{85}}{85}, \frac{-2\sqrt{85}}{85}\right)$.

Question 8. *L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifiez votre réponse.*
Vrai : ☒ *Faux :* ☐ *Si* $-1 \leqslant x \leqslant 0$*, alors* $|x| \geqslant x^2$.

Prenons un x arbitraire tel que $-1 \leqslant x \leqslant 0$ et montrons que $|x| \geqslant x^2$. Comme $x \leqslant 0$, la définition de valeur absolue dit que $|x| = -x$. Nous voulons montrer $-x \geqslant x^2$. Comme $x \leqslant 0$, multiplier les deux membres de l'inéquation $-1 \leqslant x$ par x renverse le sens de l'inégalité. On a donc $-1 \cdot x \geqslant x \cdot x$ qui est ce que l'on voulait montrer.

Question 9. *Soient* $u, v, w \in \mathbb{R}^N$.

(a) *Définissez la norme de u, notée* $\|u\|$*, et le produit scalaire de u et de v, noté* $(u|v)$.

Posons $u = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_N)$ et $w = (w_1, w_2, \ldots, w_N)$.
On a que $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_N^2}$ et $(u|v) = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_Nv_N$.

(b) *Montrez que* $(u|v+w) = (u|v) + (u|w)$*. Détaillez votre raisonnement ainsi que les propriétés que vous utilisez.*

On a

$$\begin{aligned}
(u|v+w) &= \big((u_1,u_2,\ldots,u_N) \,\big|\, (v_1,v_2,\ldots,v_N) + (w_1,w_2,\ldots,w_N)\big) && \text{(déf. de } u,v,w\text{)}\\
&= \big((u_1,u_2,\ldots,u_N) \,\big|\, (v_1+w_1, v_2+w_2, \ldots, v_N+w_n)\big) && \text{(addition de deux vecteurs)}\\
&= u_1(v_1+w_1) + u_2(v_2+w_2) + \cdots + u_N(v_N+w_N) && \text{(déf. du produit scalaire)}\\
&= u_1v_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2 + \cdots + u_Nv_N + u_Nw_N && \text{(distributivité dans } \mathbb{R}\text{)}\\
&= u_1v_1 + \cdots + u_Nv_N + u_1w_1 + \cdots + u_Nw_N && \text{(commutativité du + dans } \mathbb{R}\text{)}\\
&= (u|v) + (u|w) && \text{(déf. du produit scalaire).}
\end{aligned}$$

(c) *Soient les vecteurs $x = (1,-1,2)$ et $y = (\lambda^2, \lambda, -3)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de λ les vecteurs x et y sont-ils orthogonaux ? Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

On a vu au cours que deux vecteurs x et y sont orthogonaux si $(x|y) = 0$. Or, ici, $(x|y) = \lambda^2 - \lambda - 6$. Donc, $(x|y) = 0$ si et seulement si $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$. Or, on a $\Delta = 1 + 24 = 25$ et les solutions de cette équation sont $\frac{1+5}{2} = 3$ et $\frac{1-5}{2} = -2$. En conclusion, x et y sont orthogonaux si $\lambda = 3$ ou $\lambda = -2$.

(d) *Montrez que $(v|v) = \|v\|^2$.*

On a

$$\begin{aligned}(v|v) &= v_1 v_1 + v_2 v_2 + \cdots + v_N v_N \\ &= v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_N^2 \\ &= \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_N^2}\right)^2 = \|v\|^2\end{aligned}$$

vu la définition de la norme donnée en (a).