Mathématiques Élémentaires

Test n° 3 (1er octobre 2012)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $z \in \mathbb{C}$. $/3$

(a) Prouvez que z a pour inverse $\bar{z}$ si et seulement si $|z| = 1$.

(b) Expliquez pourquoi on peut remplacer $|z| \neq 0$ dans, par exemple, l'énoncé « pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(|z| \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \bar{z}/|z|^2)$ », par $z \neq 0$, sans en changer la signification.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. /5

(a) Dans le plan complexe (dit de Gauss), représentez $\sqrt{2}-\sqrt{2}\boldsymbol{i}$. Expliquez votre démarche.

(b) Donnez la forme trigonométrique de $\sqrt{2}-\sqrt{2}\boldsymbol{i}$ et de $(\sqrt{2}-\sqrt{2}\boldsymbol{i})^2$.

(c) Représentez l'ensemble des complexes $2a+3a\boldsymbol{i}$, $a \in \mathbb{R}$. Justifiez la forme géométrique de cet ensemble.

Mathématiques Élémentaires

Test n° 3 (1er octobre 2012)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.

/6

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Le point $(\frac{1}{4}, \frac{7}{2})$ appartient à la droite $D \equiv (x,y) = (-5,0) + \lambda(-3,-2)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Le vecteur $(\pi^{-1}, 2\pi^{-1})$ est un vecteur directeur de la droite $D \equiv x = y/2 - 5$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Les droites $D_1 \equiv (x,y) = (7,-1) + \mu(-3,-2)$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $D_2 \equiv -4x + 6y = 1$ sont confondues.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Résolvez l'inéquation

/5

$$\frac{1}{|x-2|-5} \geqslant 1. \tag{1}$$

Veuillez aux conditions d'existence et à justifier les différentes étapes de vos calculs.

Mathématiques Élémentaires

Test n° 3 (1er octobre 2012)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. /4

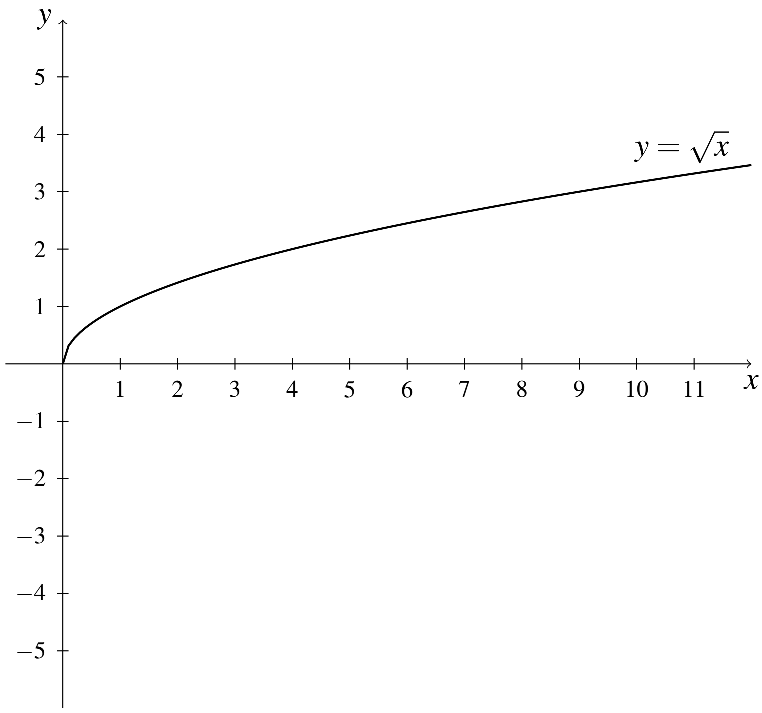
(a) Quelle est la fonction du premier degré dont le graphe est la droite D passant par le point $(1,-2)$ et perpendiculaire à la droite D' dont une équation paramétrique est $(x,y) = (5,-3) + \lambda(-1,4)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Donnez une équation paramétrique de la droite D passant par l'origine du repère et parallèle à la droite $D' \equiv -5x + y = 2x + 7 - 3y$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. Résolvez graphiquement et algébriquement l'inéquation $\sqrt{x} \geqslant x - 6$. Justifiez les différentes étapes de votre démarche. /4

Graphiquement



Algébriquement

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (i.e. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$).

/5

(a) Prouvez que z_1 et z_2 sont conjugués (i.e. $z_2 = \overline{z_1}$) si et seulement si

$$z_1 + z_2 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \tag{2}$$

$$z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

(b) Montrez que, dans l'énoncé précédent, si on enlève une des deux conditions parmi (2) et (3), on perd l'équivalence (c'est-à-dire le « si et seulement si »).

Nom :
Prénom :
Section :

/5

Question 8. Considérons la droite D ainsi que les points p et q représentés sur le dessin ci-contre. Recherchez les coordonnées du point s qui est le symétrique orthogonal du point p par rapport à la droite D.