Mathématiques Élémentaires

Test n° 3 (1er octobre 2012) Correction

Question 1. *Soit $z \in \mathbb{C}$.*

(a) *Prouvez que z a pour inverse $\overline{z}$ si et seulement si $|z| = 1$.*

Nous avons vu au cours que si $|z| \neq 0$ alors $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Par conséquent, comme on est dans les conditions pour appliquer la formule, z a pour unique inverse $\overline{z}$ si et seulement si $\frac{\overline{z}}{|z|^2} = \overline{z}$ si et seulement si $\overline{z} = |z|^2\overline{z}$ si et seulement si $|z|^2 = 1$. Le dernier si et seulement si est expliqué par le fait que par hypothèse l'inverse de $\overline{z}$ existe (car $|\overline{z}| = |z| \neq 0$), on peut donc multiplier chaque membre de l'égalité par $\overline{z}^{-1}$. Cette dernière égalité $|z|^2 = 1$ est vérifiée dans $\mathbb{R}^{>0}$ si et seulement si $|z| = 1$.

Autre preuve : Supposons $|z| = 1$, donc $|z|^2 = 1$ c'est-à-dire $z \cdot \overline{z} = 1$. Par définition de l'inverse, cela signifie que (vu la commutativité de $\cdot_{\mathbb{C}}$) $\overline{z}$ est l'inverse de z.

Réciproquement, si $\overline{z}$ est l'inverse de z alors on a $z \cdot \overline{z} = 1$ c'est-à-dire $|z|^2 = 1$ ou encore $|z| = 1$ car $|z| \geqslant 0$.

(b) *Expliquez pourquoi on peut remplacer $|z| \neq 0$ dans, par exemple, l'énoncé « pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(|z| \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \overline{z}/|z|^2)$ », par $z \neq 0$, sans en changer la signification.*

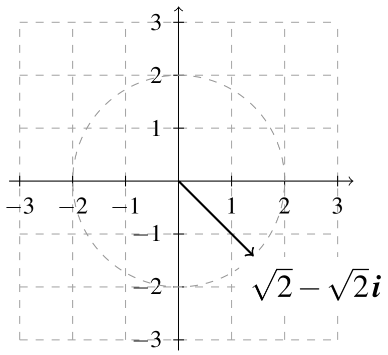
En fait $|z| \neq 0$ est équivalent à $z \neq 0$. Si on considère la représentation de z dans le plan complexe, on a clairement que $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.

Dès lors, si l'énoncé est vrai pour les complexes vérifiant $|z| \neq 0$ alors il est forcément vrai pour les complexes non-nuls.

Question 2.

(a) *Dans le plan complexe (dit de Gauss), représentez $\sqrt{2} - \sqrt{2}\boldsymbol{i}$. Expliquez votre démarche.*

Nous avons $\sqrt{2} - \sqrt{2}\boldsymbol{i} = 2\big(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\big) = 2\operatorname{cis}\big(\frac{7\pi}{4}\big)$. Le complexe recherché se trouve donc à l'intersection du cercle de centre 0 et de rayon 2 avec la droite passant par $(0,0)$ et de vecteur directeur $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ou $(1,-1)$.

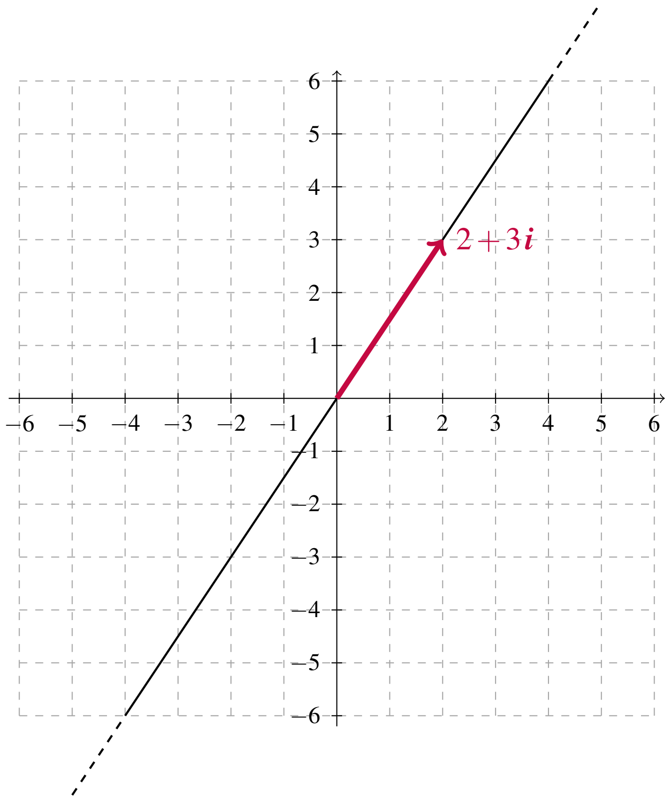


(b) *Donnez la forme trigonométrique de $\sqrt{2} - \sqrt{2}\boldsymbol{i}$ et de $(\sqrt{2} - \sqrt{2}\boldsymbol{i})^2$.*

Nous avons $\big(\sqrt{2} - \sqrt{2}\boldsymbol{i}\big)^2 = \big(2\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}\big)^2 = 4\operatorname{cis}(\frac{7\pi}{2}) = 4\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$.

(c) *Représentez l'ensemble des complexes $2a+3a\boldsymbol{i}$, $a \in \mathbb{R}$. Justifiez la forme géométrique de cet ensemble.*

En mettant a en évidence, cet ensemble équivaut à l'ensemble des multiples du complexe $2+3\boldsymbol{i}$. Cet ensemble est une droite dans le plan complexe de vecteur directeur $(2,3)$. En effet, les complexes du type $2a+3a\boldsymbol{i}$ sont les complexes représentés par un vecteur (x,y) où $x=2a$ et $y=3a$.



Question 3. *Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.*

(a) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *Le point $\left(\frac{1}{4},\frac{7}{2}\right)$ appartient à la droite $D \equiv (x,y) = (-5,0)+\lambda(-3,-2)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.*

L'affirmation est vraie. On a $\left(\frac{1}{4},\frac{7}{2}\right) \in D$ si et seulement s'il existe un réel λ tel que
$$\left(\frac{1}{4},\frac{7}{2}\right) = (-5,0)+\lambda(-3,-2)$$
c'est-à-dire $\left(\frac{1}{4},\frac{7}{2}\right) = (-5-3\lambda,-2\lambda)$ par définition de la multiplication d'un vecteur par un réel et de l'addition de deux vecteurs. Par définition de l'égalité de deux vecteurs, $\frac{1}{4} = -5-3\lambda$ et $\frac{7}{2} = -2\lambda$. La deuxième égalité donne $\lambda = \frac{-7}{4}$ et on a bien $-5-3\left(\frac{-7}{4}\right) = -5+\frac{21}{4} = \frac{1}{4}$. Donc, $\left(\frac{1}{4},\frac{7}{2}\right) \in D$ car $\left(\frac{1}{4},\frac{7}{2}\right) = (-5,0)+\frac{1}{4}(-3,-2)$.

(b) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *Le vecteur $(\pi^{-1},2\pi^{-1})$ est un vecteur directeur de la droite $D \equiv x = y/2-5$.*

L'affirmation est vraie. On a $D \equiv x-\frac{y}{2} = -5$. Donc, $\left(1,\frac{-1}{2}\right)$ est un vecteur normal de D. Le vecteur $(\pi^{-1},2\pi^{-1})$ sera un vecteur directeur de D si son produit scalaire avec $\left(1,\frac{-1}{2}\right)$ vaut 0. Or, $\left((1,-\frac{1}{2}) \mid (\pi^{-1},2\pi^{-1})\right) = \pi^{-1}-\frac{1}{2}\cdot 2\pi^{-1} = \pi^{-1}-\pi^{-1} = 0$.

(c) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *Les droites* $D_1 \equiv (x,y) = (7,-1) + \mu(-3,-2)$, $\mu \in \mathbb{R}$ *et* $D_2 \equiv -4x + 6y = 1$ *sont confondues.*

L'affirmation est fausse. Un vecteur directeur de D_1 est $(-3,-2)$ et un vecteur normal de D_2 est $(-4,6)$. Ces deux vecteurs sont orthogonaux car

$$\big((-3,-2) \mid (-4,6)\big) = -3\cdot(-4) - 2\cdot 6 = 12 - 12 = 0.$$

On déduit que les droites D_1 et D_2 sont parallèles. Elles seront confondues si elles ont au moins un point en commun. Or $(7,-1) \in D_1$. Ce point n'appartient pas à D_2 car en remplaçant x par 7 et y par -1 dans l'équation de D_2, on a

$$-4\cdot 7 + 6\cdot(-1) = -28 - 6 = -34 \neq 1.$$

Donc D_1 et D_2 sont des droites parallèles distinctes.

Question 4. *Résolvez l'inéquation*

$$\frac{1}{|x-2|-5} \geqslant 1. \tag{1}$$

Veuillez aux conditions d'existence et à justifier les différentes étapes de vos calculs.

La condition pour que les expressions de (1) aient un sens est que le dénominateur $|x-2|-5$ soit non-nul. Comme de plus nous allons multiplier les deux membres par cette quantité, commençons par déterminer son signe. Nous allons distinguer les cas $x < 2$ et $x \geqslant 2$ pour pouvoir retirer les valeurs absolues.

		-3		2		7	
$\lvert x-2\rvert-5$		$-x-3$				$x-7$	
signe de $\lvert x-2\rvert-5$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

On constate donc que les conditions d'existence sont $x \neq -3$ et $x \neq 7$. Distinguons quatre cas :

- $x \in \,]-\infty,-3[$. Comme le dénominateur est positif, l'inéquation (1) est équivalente à
$$1 \geqslant |x-2| - 5 = -x - 3$$
c'est-à-dire à $x \geqslant -4$. Les solutions pour ce cas sont donc $x \in [-4,-3[$.
- $x \in \,]-3,2[$. Le dénominateur étant négatif, (1) devient $1 \leqslant |x-2| - 5 = -x-3$ c'est-à-dire $x \leqslant -4$. Vu qu'aucun $x \in \,]-3,2[$ ne satisfait cette condition, (1) ne possède pas de solution dans cet intervalle.
- $x \in [2,7[$. L'inéquation (1) est équivalente à $1 \leqslant |x-2| - 5 = x - 7$, ou encore $x \geqslant 8$. Aucun $x \in \,]2,7[$ ne satisfait cette condition. Il n'y a donc pas de solution $x \in [2,7[$ de (1).
- $x \in \,]7,\infty[$. L'inéquation (1) devient $1 \geqslant |x-2| - 5 = x - 7$, c'est-à-dire $x \leqslant 8$. L'ensemble des solutions pour ce cas est donc $[7,8]$.

En conclusion, les x solutions de (1) sont les x solutions trouvés dans un des quatre cas ci-dessus, c'est-à-dire les x dans l'ensemble $[-4,-3[\cup \emptyset \cup \emptyset \cup]7,8] = [-4,-3[\cup]7,8]$.

Question 5.

(a) *Quelle est la fonction du premier degré dont le graphe est la droite D passant par le point $(1,-2)$ et perpendiculaire à la droite D' dont une équation paramétrique est $(x,y) = (5,-3)+\lambda(-1,4)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.*

$(-1,4)$ est un vecteur directeur de D'. C'est donc un vecteur normal de D puisque les droites D et D' sont perpendiculaires. Une équation cartésienne de D sera donc de la forme $-x+4y = c$. Comme $(1,-2) \in D$, on trouve c en remplaçant x par 1 et y par -2 dans l'équation : $-1+4\cdot(-2) = c$, c'est-à-dire $c = -9$. Donc, $D \equiv -x+4y = -9$. Comme on cherche une fonction de la forme $f(x) = mx+p$, où $m, p \in \mathbb{R}$, on isole la variable y dans l'équation obtenue. On a $4y = x-9$ c'est-à-dire $y = \frac{x}{4}-\frac{9}{4}$. La fonction recherchée est donc $f(x) = \frac{x}{4}-\frac{9}{4}$.

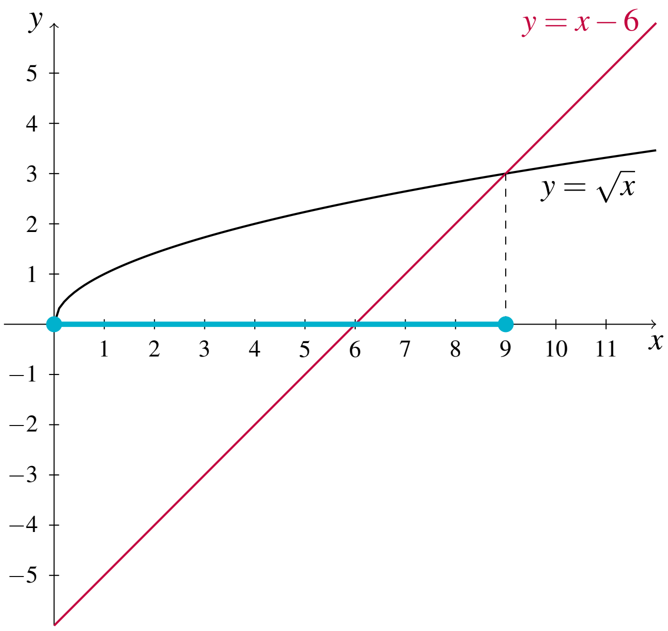
(b) *Donnez une équation paramétrique de la droite D passant par l'origine du repère et parallèle à la droite $D' \equiv -5x+y = 2x+7-3y$.*

On a $D' \equiv -7x+4y = 7$. Un vecteur normal de D' est $(-7,4)$. C'est également un vecteur normal de D puisque les droites D et D' sont parallèles. Par conséquent, $(4,7)$ est un vecteur directeur de D car il est orthogonal au vecteur $(-7,4)$. En effet, $\big((-7,4) \,\big|\, (4,7)\big) = -7\cdot 4+4\cdot 7 = -28+28 = 0$. Comme $(0,0) \in D$, on en déduit qu'une équation paramétrique de D est $(x,y) = \lambda(4,7)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Question 6. *Résolvez graphiquement et algébriquement l'inéquation $\sqrt{x} \geqslant x-6$. Justifiez les différentes étapes de votre démarche.*

Graphiquement

On commence par ajouter la droite $y = x-6$ sur le dessin de droite (il suffit de choisir deux points qui lui appartiennent, tels $(0,-6)$ et $(6,0)$). L'inéquation $\sqrt{x} \geqslant x-6$ se traduit géométriquement par le fait que la courbe $y = \sqrt{x}$ est au dessus de la droite $y = x-6$. Le dessin montre que les abscisses x pour lequel c'est le cas forment un intervalle qui commence à 0 et se termine en 9, le point de rencontre des deux courbes[a]. L'ensemble des solutions du système est donc l'intervalle $[0,9]$.



[a] On peut vérifier que les deux courbes se rencontrent bien en $x = 9$ et non pas en une abscisse proche mais indistingable graphiquement. En effet, lorsque $x = 9$, on a $\sqrt{x} = 3 = x-6$.

Algébriquement

Commençons par remarquer que $\sqrt{x}$ n'a de sens que pour $x \geqslant 0$. Les conditions d'existence sont donc $x \in [0,+\infty[$. Distinguons deux cas.

- $x \in [0,6]$. Pour ces x, $x-6 \leqslant 0$ et donc l'inégalité est satisfaite car $\sqrt{x} \geqslant 0$ quel que soit x.
- $x \in]6,+\infty[$. Dans ce cas, les deux membres de l'inéquation sont positifs. Comme la fonction $\xi \mapsto \xi^2$ est croissante pour $\xi \geqslant 0$, on peut élever au carré les deux membres de l'inéquation et obtenir l'inégalité équivalente :

  $$x = (\sqrt{x})^2 \geqslant (x-6)^2 = x^2 - 12x + 36.$$

  En rassemblant les termes, ceci se réduit à $x^2 - 13x + 36 \leqslant 0$. Les racines du polynôme du second degré étant 4 et 9 et le signe du coefficient de x^2 étant positif, on déduit que cette dernière inégalité est satisfaite si et seulement si $x \in [4,9]$. Se rappelant que l'on travaille avec des $x \in]6,+\infty[$, on conclut que les solutions pour ce cas sont les $x \in]6,9]$.

En conclusion, les solutions de l'inéquation initiale sont les x trouvés dans chacun des 2 cas ci-dessus, c'est-à-dire que l'ensemble des solutions est

$$[0,6] \cup]6,9] = [0,9].$$

Question 7. *Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (i.e. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$).*

(a) *Prouvez que z_1 et z_2 sont conjugués (i.e. $z_2 = \overline{z_1}$) si et seulement si*

$$z_1 + z_2 \in \mathbb{R} \qquad \textit{et} \tag{2}$$

$$z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Posons $z_1 = a + b\boldsymbol{i}$ et $z_2 = c + d\boldsymbol{i}$ où $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ et où b et d sont non-nuls.

Dans un premier temps, admettons que (2) et (3) sont vérifiées, on doit prouver que $z_2 = \overline{z_1}$. Les équations (2) et (3) (vu les notations choisies) sont équivalentes à

$$a + c + (b+d)\boldsymbol{i} \in \mathbb{R} \text{ et } ac - bd + (ad+bc)\boldsymbol{i} \in \mathbb{R}.$$

C'est équivalent à $b+d = 0$ et $ad+bc = 0$ ou encore à $b = -d$ et $ad - dc = 0$. Comme on est dans $\mathbb{R}$ et que $d \neq 0$ par hypothèse, nous avons $b = -d$ et $a = c$. Ceci implique que $z_1 = a + b\boldsymbol{i}$ et $z_2 = a - b\boldsymbol{i}$ et sont donc conjugués.

Réciproquement, si z_1 et z_2 sont conjugués alors $z_1 + z_2 = 2a \in \mathbb{R}$ et $z_1 \cdot z_2 = |z_1|^2 \in \mathbb{R}$ (par une formule vue au cours). Ceci prouve l'assertion.

Remarque : Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors ils sont solutions de l'équation

$$(x - z_1)(x - z_2) = 0$$

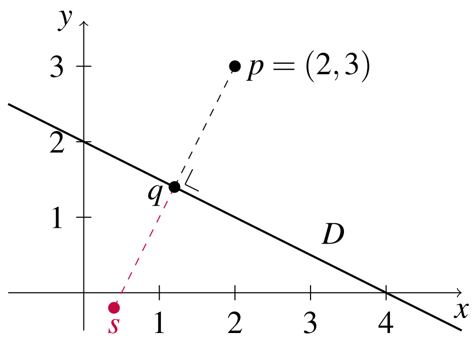
c'est-à-dire de $x^2 - (z_1 + z_2)x + z_1 z_2 = 0$ (si z est solution de l'équation à coefficients réels alors $\overline{z}$ l'est aussi).

(b) *Montrez que, dans l'énoncé précédent, si on enlève une des deux conditions parmi* (2) *et* (3)*, on perd l'équivalence (c'est-à-dire le « si et seulement si »).*

Si on enlève la condition (2) alors on peut construire le contre-exemple suivant. Considérons $z_1 = 1+\boldsymbol{i}$ et $z_2 = -2+2\boldsymbol{i}$. Comme $a_1b_2+b_1a_2 = 0$, leur produit est bien réel. On remarque que leur somme n'est pas réelle. Ceci est bien un contre-exemple car les deux complexes ne sont pas conjugués.

Si on enlève la condition (3) alors on peut construire le contre-exemple suivant. Considérons $z_1 = 2+\boldsymbol{i}$ et $z_2 = 4-\boldsymbol{i}$ afin que leur somme soit réelle (elle vaut 6). Nous remarquons que leur produit vaut $8+4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{i}+1 = 9+2\boldsymbol{i}$ qui n'est pas réel. Ceci est donc bien un contre-exemple puisque z_1 et z_2 ne sont pas conjugués.

Question 8. *Considérons la droite D ainsi que les points p et q représentés sur le dessin ci-contre. Recherchez les coordonnées du point s qui est le symétrique orthogonal du point p par rapport à la droite D.*



Recherchons d'abord le point q qui est le point d'intersection entre la droite D et la droite D' passant par p et perpendiculaire à D. Pour cela, nous avons besoin d'une équation de chaque droite. La droite D passe par les points $(0,2)$ et $(4,0)$. Sa pente vaut donc $\frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$. Donc $D \equiv y = -\frac{1}{2}x+p$. Comme $(0,2) \in D$, on a en remplaçant x par 0 et y par 2 : $2 = 0+p$ c'est-à-dire $p = 2$. Donc, $D \equiv y = \frac{-1}{2}x+2$ ou encore $D \equiv x+2y = 4$. Comme $D \perp D'$, la pente de D' vaut 2 car le produit des pentes de deux droites perpendiculaires vaut -1. Donc $D' \equiv y = 2x+p$. Comme le point $(2,3) \in D'$, on a en remplaçant x par 2 et y par 3, $3 = 2\cdot 2+p$ c'est-à-dire $p = -1$. Donc, $D' \equiv y = 2x-1$ ou encore $D' \equiv -2x+y = -1$.

Comme q appartient à la fois à D et à D', on trouve ses composantes en résolvant le système formé par les 2 équations :

$$\begin{cases} x+2y = 4 \\ -2x+y = -1 \end{cases}$$

La première équation donne $x = 4-2y$. En remplaçant dans la deuxième équation, on a $-8+4y+y = -1$ c'est-à-dire $5y = 7$ c'est-à-dire $y = \frac{7}{5}$. Donc, $x = 4-\frac{14}{5} = \frac{6}{5}$ et donc $q = (\frac{6}{5}, \frac{7}{5})$.

Le point q est en fait le milieu du segment joignant le point s recherché et le point p. Posons $s = (s_1, s_2)$. On a donc $(\frac{6}{5}, \frac{7}{5}) = \left(\frac{s_1+2}{2}, \frac{s_2+3}{2}\right)$. C'est-à-dire $\frac{6}{5} = \frac{s_1+2}{2}$ et $\frac{7}{5} = \frac{s_2+3}{2}$.

Nous obtenons $\frac{12}{5}-2 = s_1$ et $\frac{14}{5}-3 = s_2$, c'est-à-dire $s_1 = \frac{2}{5}$ et $s_2 = \frac{-1}{5}$. Donc $s = (\frac{2}{5}, \frac{-1}{5})$.