

Mathématiques Élémentaires

Test n° 4

(8 octobre 2012)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Prouvez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la somme de tous les nombres impairs de 1 à $2n - 1$ vaut n^2 .

/4

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 2. Soit le système

$$\begin{cases} x - \lambda y + \lambda^2 = 0 \\ x + \lambda^2 y + \lambda = 0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

- (a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède-t-il une infinité de solutions ? Expliquez votre raisonnement.
- (b) Pour la ou les valeurs trouvées au point précédent, donnez l'ensemble des solutions du système.

/4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

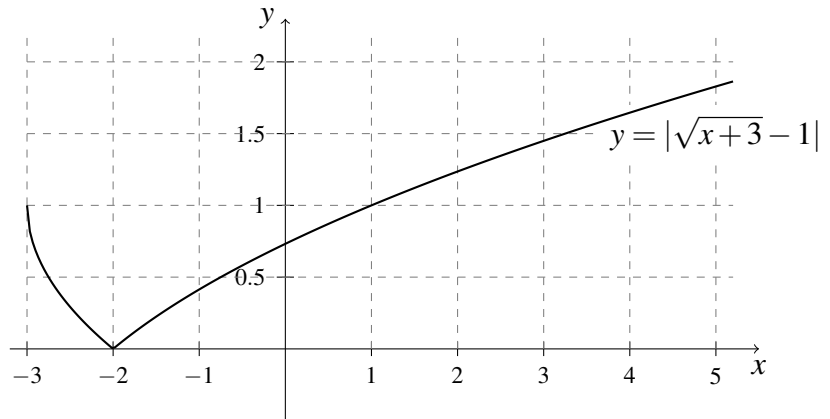
Question 3.

/5

(a) Donnez l'ensemble des valeurs de $x \in \mathbb{R}$ qui satisfait l'inéquation :

$$|\sqrt{x+3} - 1| \leq 1.$$

(b) Comment le graphique ci-dessous vous permet-il de déterminer si la réponse que vous avez donnée en (a) est correcte ? Expliquez votre démarche.



Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 4.

/4

- (a) Donnez la table de vérité de $(A \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \vee \neg C)$.
- (b) Donnez une formule équivalente à la précédente et qui soit plus simple.
- (c) Donnez la contraposée de la phrase « si je rate ce test, alors je raterai le test final ».

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 5. Considérons l'équation d'une droite D :

$$\alpha x + \beta y = 0$$

où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- (a) Sous quelle(s) condition(s) sur α et β cette droite est-elle le graphe d'une fonction ? Expliquez votre démarche.
- (b) Montrez que si (a_1, b_1) et (a_2, b_2) sont des points de la droite D , alors $(a_1, b_1) + (a_2, b_2)$ est aussi un point de la droite D .

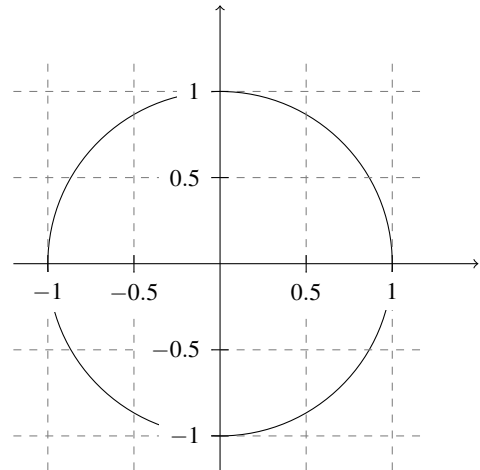
/3

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 6.

/5

- (a) Donnez la forme trigonométrique de $z = \sqrt{3} - i$ et représentez $\text{cis}(\text{Arg } z)$ sur le cercle trigonométrique.



- (b) Donnez la forme trigonométrique de z^3 et en déduire sa forme cartésienne.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 7. Les relations suivantes définissent-elles des fonctions ? Justifiez vos réponses.

/3

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y$ tel que $\sin y = x$;

(b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y$ tel que $(y + 2)^3 = x - 1$;

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 8. Soit p et q deux nombres réels, $\Delta = q^2/4 + p^3/27$ et supposons que $\Delta \geq 0$. Prouver que

$$r = r_1 + r_2 \quad \text{avec} \quad r_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}} \quad \text{et} \quad r_2 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}}$$

est solution de l'équation $z^3 + pz + q = 0$.

/3