Mathématiques Élémentaires

Test n° 4 (8 octobre 2012) **Correction**

Question 1. *Prouvez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la somme de tous les nombres impairs de 1 à $2n-1$ vaut n^2.*

Le <u>cas initial</u> est $n = 1$. Il est équivalent à montrer que $1 = 1^2$ (puisque $2 \cdot 1 - 1 = 1$). C'est trivialement vérifié.

Pour l'<u>étape de récurrence</u>, on suppose que l'assertion est vraie pour $1 \leqslant n \leqslant k$ (hypothèse de récurrence), et on va montrer que la somme de tous les nombres impairs de 1 à $2(k+1)-1$ vaut $(k+1)^2$; c'est à dire

$$\sum_{j=1}^{k+1} (2j-1) = (k+1)^2.$$

Par hypothèse de récurrence, on a

$$\sum_{j=1}^{k} (2j-1) = k^2.$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\sum_{j=1}^{k+1} (2j-1) = \sum_{j=1}^{k} (2j-1) + 2(k+1) - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

Par le principe de récurrence, on a donc prouvé l'assertion quel que soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Question 2. *Soit le système*

$$\begin{cases} x - \lambda y + \lambda^2 = 0 \\ x + \lambda^2 y + \lambda = 0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) *Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède-t-il une infinité de solutions ? Expliquez votre raisonnement.*

(b) *Pour la ou les valeurs trouvées au point précédent, donnez l'ensemble des solutions du système.*

Nous avons vu au cours que le système est susceptible d'avoir une infinité de solutions pour les valeurs de λ qui annulent le déterminant. En effet, pour ces valeurs, soit le système n'a pas de solution soit il en a une infinité et, pour les valeurs de λ pour lesquelles le déterminant est non nul, le système a une solution unique. Le déterminant du système vaut $\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1)$.

Le déterminant s'annule donc lorsque $\lambda = 0$ ou $\lambda = -1$.

Si $\lambda = 0$, alors le système devient

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

Géométriquement, nous avons donc deux droites confondues et le système possède une infinité de solutions. L'ensemble des solutions est ici $\{(0, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.
Si $\lambda = -1$, alors le système devient

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ x + y - 1 = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x + y = -1, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

En faisant la différence des deux équations, on obtient $0 = -2$. Le système n'a donc pas de solution. En conclusion, $\lambda = 0$ est la seule valeur pour laquelle le système possède une infinité de solutions.

Question 3.

(a) *Donnez l'ensemble des valeurs de $x \in \mathbb{R}$ qui satisfont l'inéquation :*

$$|\sqrt{x+3} - 1| \leqslant 1. \tag{1}$$

Commençons par rechercher les conditions d'existence. La seule opération qui pose problème est la prise de racine carrée. Elles sont donc données par la condition $x + 3 \geqslant 0$ c'est-à-dire $x \geqslant -3$.

Rappelons que $|\xi| \leqslant c$ si et seulement si $-c \leqslant \xi$ et $\xi \leqslant c$. Appliquant cela à l'inéquation $|\sqrt{x+3} - 1| \leqslant 1$, on obtient la propriété équivalente

$$-1 \leqslant \sqrt{x+3} - 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{x+3} - 1 \leqslant 1$$

ou encore

$$0 \leqslant \sqrt{x+3} \quad \text{et} \quad \sqrt{x+3} \leqslant 2. \tag{2}$$

Comme le premier terme de cette conjonction est toujours vrai (une racine carrée étant toujours positive), (2) se réduit à

$$\sqrt{x+3} \leqslant 2.$$

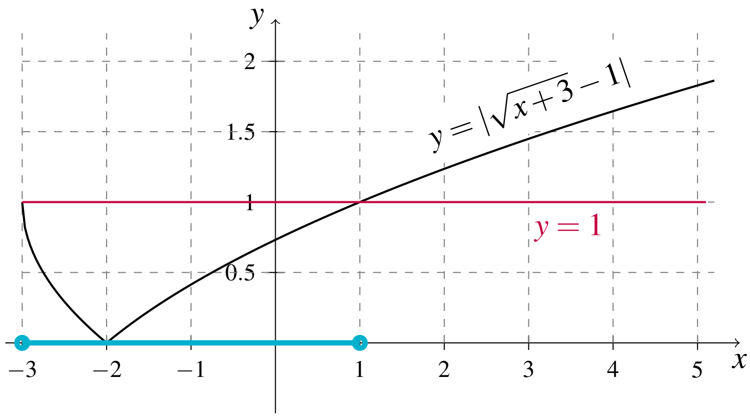
Sous les conditions d'existence, cette inégalité est équivalente à celle obtenue en élevant les deux membres au carré :

$$x + 3 \leqslant 4$$

c'est-à-dire $x \leqslant 1$. En n'oubliant pas les conditions d'existence, on conclut que l'ensemble des solutions est l'intervalle $[-3, 1]$.

(b) *Comment le graphique ci-dessous vous permet-il de déterminer si la réponse que vous avez donnée en (a) est correcte ? Expliquez votre démarche.*

On trace la droite $y = 1$. L'inéquation (1) est satisfaite pour les x tels que la fonction $x \mapsto |\sqrt{x+3}-1|$ est en dessous (ou touche) la droite $y = 1$. On a l'égalité en $x = -3$ et en $x = 1$ et l'inégalité stricte pour $x \in\,]-3,1[$. L'ensemble des solutions est donc $[-3,1]$.



Question 4.

(a) *Donnez la table de vérité de*[1] $\big(A \wedge (B \Rightarrow C)\big) \Rightarrow (B \vee \neg C)$.

A	B	C	$B \Rightarrow C$	$A \wedge (B \Rightarrow C)$	$\neg C$	$B \vee \neg C$	$\big(A \wedge (B \Rightarrow C)\big) \Rightarrow (B \vee \neg C)$
0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1

(b) *Donnez une formule équivalente à la précédente et qui soit plus simple.*

On remarque que la table de vérité donne « vrai » tout le temps sauf lorque nous avons A et C et que nous n'avons pas B. Donc, une formule équivalente est donnée par $\neg(A \wedge \neg B \wedge C)$ qui est elle-même équivalente à $\neg A \vee B \vee \neg C$.

(c) *Donnez la contraposée de la phrase « si je rate ce test, alors je raterai le test final ».*

Si je ne rate pas le test final alors je n'ai pas raté ce test.

[1] Vu que, par convention, la priorité de l'implication est la plus faible, on peut aussi écrire cette proposition comme $A \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow B \vee \neg C$.

Question 5. *Considérons l'équation d'une droite D :*

$$\alpha x + \beta y = 0$$

où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(a) *Sous quelle(s) condition(s) sur α et β cette droite est-elle le graphe d'une fonction ? Expliquez votre démarche.*

La droite D sera le graphe d'une fonction (du premier degré) si son équation peut s'écrire sous la forme $y = mx + p$ pour certains $m, p \in \mathbb{R}$. Or l'équation $\alpha x + \beta y = 0$ s'écrit $\beta y = -\alpha x$. Si $\beta \neq 0$ alors on a $y = \frac{-\alpha}{\beta} x$ et cette équation a la forme voulue : c'est celle du graphe de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{-\alpha}{\beta} x$. Si $\beta = 0$, l'équation devient $\alpha x = 0$ c'est-à-dire $x = 0$ (puisque α et β ne peuvent tous deux être nuls). Cette équation est celle d'une droite verticale. Elle ne peut représenter le graphe d'une fonction car, à $x = 0$, elle fait correspondre n'importe quel $y \in \mathbb{R}$ (contredisant ainsi l'unicité demandée dans la définition de fonction). En conclusion, la droite D est donc le graphe d'une fonction si et seulement si $\beta \neq 0$.

(b) *Montrez que si (a_1, b_1) et (a_2, b_2) sont des points de la droite D, alors $(a_1, b_1) + (a_2, b_2)$ est aussi un point de la droite D.*

Par hypothèse, on a $(a_1, b_1) \in D$ et $(a_2, b_2) \in D$. Donc on a

$$\alpha a_1 + \beta b_1 = 0, \quad \text{et} \tag{3}$$
$$\alpha a_2 + \beta b_2 = 0. \tag{4}$$

Nous devons montrer que $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) \in D$ c'est-à-dire par définition de l'addition dans $\mathbb{R}^2$ que $(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \in D$ ou encore $\alpha(a_1 + a_2) + \beta(b_1 + b_2) = 0$. Or, on a

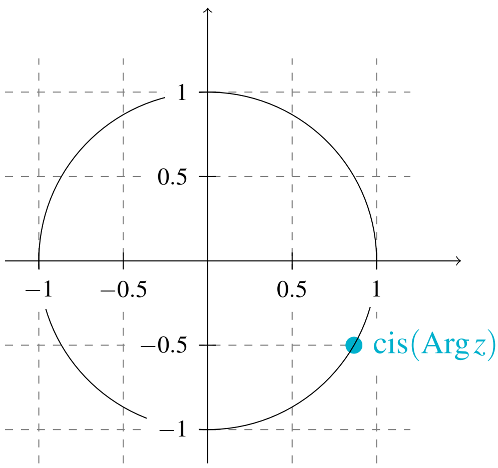
$$\begin{aligned}
\alpha(a_1 + a_2) + \beta(b_1 + b_2) &= \alpha a_1 + \alpha a_2 + \beta b_1 + \beta b_2 && \text{par distributivité dans } \mathbb{R} \\
&= \alpha a_1 + \beta b_1 + \alpha a_2 + \beta b_2 && \text{par commutativité de l'addition dans } \mathbb{R} \\
&= 0 + 0 && \text{par (3) et (4)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Question 6.

(a) Donnez la forme trigonométrique de $z = \sqrt{3} - \boldsymbol{i}$ et représentez $\operatorname{cis}(\operatorname{Arg} z)$ sur le cercle trigonométrique.

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{3} - \boldsymbol{i} \\ &= \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2}\, \operatorname{cis}(\operatorname{Arg} z) \\ &= 2\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\boldsymbol{i}}{2}\Big) \\ &= 2\operatorname{cis}\Big(2\pi - \frac{\pi}{6}\Big) \\ &= 2\operatorname{cis}\Big(\frac{11\pi}{6}\Big) \end{aligned}$$

Le nombre $\operatorname{cis}(\operatorname{Arg} z) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\boldsymbol{i}}{2}$ est sur le cercle trigonométrique avec une partie imaginaire égale à $-1/2$ et une partie réelle positive.



(b) Donnez la forme trigonométrique de z^3 et en déduire sa forme cartésienne.

Par une formule vue au cours, nous obtenons $z^3 = 2^3 \operatorname{cis}\big(3\frac{11\pi}{6} \bmod 2\pi\big) = 8\operatorname{cis}\big(\frac{11\pi}{2} \bmod 2\pi\big) = 8\operatorname{cis}\big(\frac{3\pi}{2}\big)$. La forme cartésienne est donc $z^3 = 8\cos\big(\frac{3\pi}{2}\big) + 8\sin\big(\frac{3\pi}{2}\big)\boldsymbol{i} = -8\boldsymbol{i}$.

Question 7. *Les relations suivantes définissent-elles des fonctions ? Justifiez vos réponses.*

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y$ *tel que* $\sin y = x$ *;*

Non. En effet, il existe au moins un x auquel la relation f fait correspondre plusieurs y. Par exemple, pour $x = 0$, les y qui lui correspondent sont les solutions de $\sin y = 0$. Cette dernière équation possède au moins $y = 0$ et $y = 2\pi$ comme solutions.

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y$ *tel que* $(y+2)^3 = x - 1$ *;*

Oui. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il correspond au plus une valeur y vérifiant $(y+2)^3 = x-1$. Pour $x \in \mathbb{R}$, il suffit de considérer $y = (x-1)^{1/3} - 2$ (on se rappelle que $\xi^3 = \eta$ possède une unique solution $\xi = \sqrt[3]{\eta}$ quelle que soit la valeur de $\eta \in \mathbb{R}$).

Question 8. *Soit p et q deux nombres réels, $\Delta = q^2/4 + p^3/27$ et supposons que $\Delta \geqslant 0$. Prouver que*

$$r = r_1 + r_2 \quad \textit{avec} \quad r_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}} \quad \textit{et} \quad r_2 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}}$$

est solution de l'équation $z^3 + pz + q = 0$.

Remarquons que r_1 et $r_2 \in \mathbb{R}$ et sont bien définis vu l'hypothèse $\Delta \geqslant 0$ et l'unicité de la racine cubique d'un réel.

Par définition de la notion de solution, il suffit de vérifier que $(r_1+r_2)^3 + p(r_1+r_2) + q = 0$. En utilisant la formule $(r_1+r_2)^3 = r_1^3 + 3r_1^2r_2 + 3r_1r_2^2 + r_2^3 = r_1^3 + 3r_1r2(r_1+r_2) + r_2^3$ et le fait que $r_1r_2 = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q)^2 - \Delta} = \sqrt[3]{-\frac{1}{27}p^3} = -\frac{1}{3}p$ (par définition de Δ). On doit vérifier que

$$-\frac{1}{2}q + \sqrt{\Delta} + 3\bigl(-\tfrac{1}{3}p\bigr)(r_1+r_2) - \frac{1}{2}q - \sqrt{\Delta} + p(r_1+r_2) + q = 0$$

ce qui est clairement le cas après simplifications.