

Mathématiques Élémentaires

Test n° 5

(15 octobre 2012)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soient $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}^{p \times p}$. Montrez par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$(A_1 A_2 \cdots A_n)^t = A_n^t \cdots A_2^t A_1^t$$

/4

Question 2.

/4

(a) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Définissez « A est une matrice symétrique ».

(b) Soit la matrice $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice définie par

$$M_{ij} = (-1)^{i+j}(i^3 - j^3)^2$$

La matrice M est-elle symétrique ? Expliquez votre raisonnement et détaillez vos calculs.

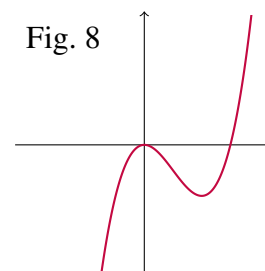
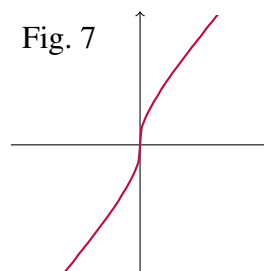
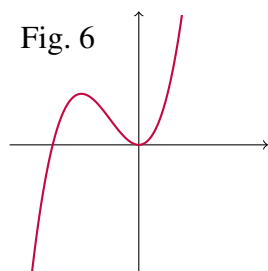
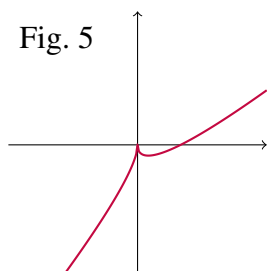
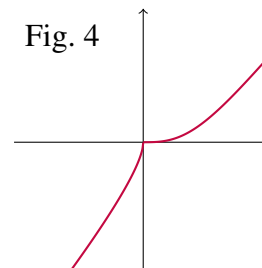
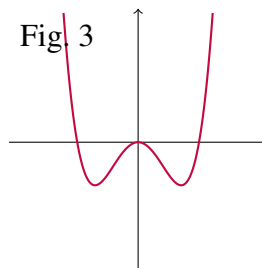
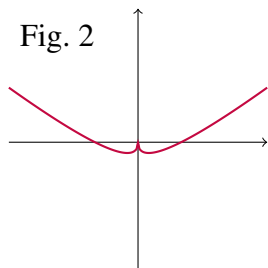
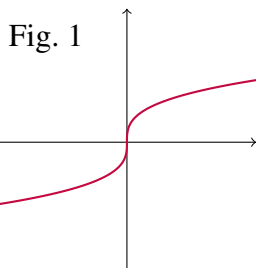
(c) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. On définit la trace de A , notée $\text{tr}A$, par $\text{tr}A = \sum_{i=1}^n A_{ii}$. Calculez la trace de la matrice M définie au point précédent.

Question 3. Pour chacune des fonctions suivantes, donnez le numéro de la figure qui représente son graphe. Justifiez votre choix en détaillant les caractéristiques des fonctions qui le motivent. Veillez à ce que les caractéristiques données ne permettent que le choix que vous avez fait.

(a) Fig. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x - \sqrt{|x|}$

(b) Fig. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 2x^2$

(c) Fig. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^{1/3} + x$



Question 4.

/5

(a) Donnez la matrice $M \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ définie par

$$M_{ij} = \begin{cases} i+j & \text{si } i \leq j, \\ 42 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad -3), \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Calculez, si possible, BC , AC^t et D^2 .

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 5. Les relations ci-dessous sont-elles des fonctions ? Lorsque vous répondez positivement, donnez le domaine et l'image de la fonction.

/5

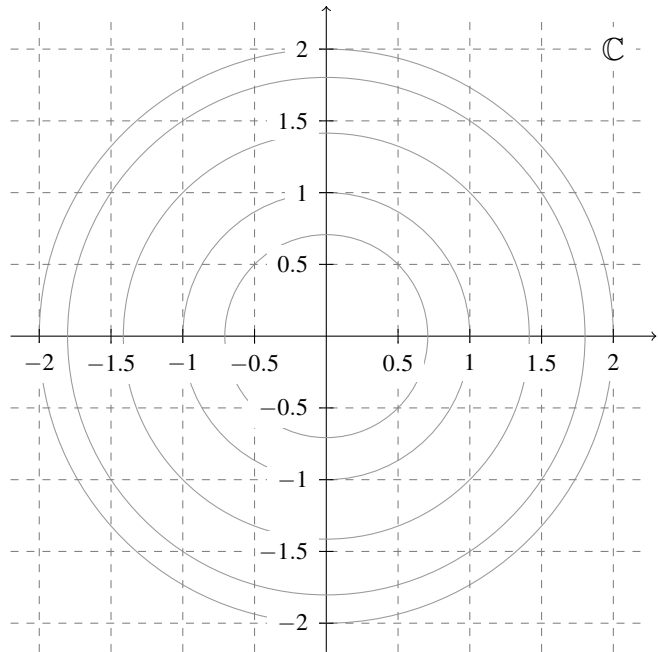
(a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{D} : (a, b) \mapsto D$ tel que D est la droite d'équation $ax + by = 1$. Le symbole \mathcal{D} représente l'ensemble des droites du plan de coordonnées (x, y) .

(b) $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto w$ tel que $w^2 = z$ et $\operatorname{Re}(w) \geq 0$.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 6.

- (a) Donnez la forme trigonométrique du nombre complexe $2 - 2i$ et représentez-le dans le plan complexe.
- (b) Donnez la forme trigonométrique de $-1 - i$ et représentez-le dans le plan complexe.
- (c) Résolvez dans \mathbb{C} l'équation $X^3 = 2 - 2i$. Donnez les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique. Représentez-les dans le plan complexe.



Mathématiques Élémentaires

Test n° 5

(15 octobre 2012)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 6 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 7. Donnez la négation de « si je vais à Barcelone, alors je ne vais pas en Espagne ».

/2