Mathématiques Élémentaires

Test n° 5 (15 octobre 2012) **Correction**

Question 1. *Soient $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Montrez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, on a*

$$(A_1 A_2 \cdots A_n)^t = A_n^t \cdots A_2^t A_1^t \tag{1}$$

Le cas de base, $n = 1$, affirme que $(A_1)^t = A_1^t$. C'est trivialement vérifié.
Étape de récurrence : Supposons que l'égalité (1) soit vérifiée pour tous les naturels $n \leqslant k$ (avec $k \geqslant 1$) ; prouvons que, sous cette hypothèse de récurrence, l'égalité (1) est vérifiée pour $n = k+1$, c'est-à-dire que

$$(A_1 A_2 \cdots A_k A_{k+1})^t = A_{k+1}^t A_k^t \cdots A_2^t A_1^t.$$

On a :

$$\begin{aligned}
(A_1 A_2 \cdots A_k A_{k+1})^t &= \big((A_1 A_2 \cdots A_k) A_{k+1}\big)^t && \text{associativité du produit matriciel}\\
&= A_{k+1}^t (A_1 A_2 \cdots A_k)^t && \text{car } (AB)^t = B^t A^t\\
&= A_{k+1}^t (A_k^t \cdots A_2^t A_1^t) && \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= A_{k+1}^t A_k^t \cdots A_2^t A_1^t && \text{associativité du produit matriciel}
\end{aligned}$$

Question 2.

(a) *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Définissez « A est une matrice symétrique ».*
A est symétrique si $A^t = A$ où A^t désigne la transposée de A.

(b) *Soit la matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par*

$$M_{ij} = (-1)^{i+j}(i^3 - j^3)^2$$

La matrice M est-elle symétrique ? Expliquez votre raisonnement et détaillez vos calculs.
Regardons si $M^t = M$ c'est-à-dire $\forall i, j = 1, \dots, n,\ M_{ij}^t = M_{ji}$. On a :

$$\begin{aligned}
M_{ij}^t &= M_{ji} && \text{par définition de la transposée}\\
&= (-1)^{j+i}(j^3 - i^3)^2 && \text{par définition de } M\\
&= (-1)^{i+j}\big(-(i^3 - j^3)\big)^2 && \text{car } (-1)^{i+j} = (-1)^{j+i}\\
&= (-1)^{i+j}\underbrace{(-1)^2}_{=1}(i^3 - j^3) = M_{ij}
\end{aligned}$$

(c) *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. On définit la trace de A, notée $\operatorname{tr} A$, par $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$. Calculez la trace de la matrice M définie au point précédent.*

On a $M_{ii} = (-1)^{i+i}(i^3 - i^3)^2 = 0$ pour tout i. Donc $\operatorname{tr} M = \sum_{i=1}^{n} M_{ii} = \underbrace{0+0+\cdots+0}_{n \text{ fois}} = 0$.

Question 3. *Pour chacune des fonctions suivantes, donnez le numéro de la figure qui représente son graphe. Justifiez votre choix en détaillant les caractéristiques des fonctions qui le motivent. Veillez à ce que les caractéristiques données ne permettent que le choix que vous avez fait.*

(a) *Fig.* $\boxed{5}$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x - \sqrt{|x|}$.

Lorsque $|x|$ est très grand, $x \gg \sqrt{|x|}$ et donc $f(x) := x - \sqrt{|x|} \approx x$. Les seuls graphes qui admettent la droite $y = x$ comme asymptote oblique en $\pm\infty$ sont 4, 5 et 7. Lorsque $x \approx 0$, $x \ll \sqrt{|x|}$ et donc $f(x) \approx -\sqrt{|x|}$. Par conséquent, $f(x) \leqslant 0$ si x est proche de 0 (et on sait même que la forme ressemble à celle de $-\sqrt{x}$, copiée symétriquement par rapport à l'axe y puisque la fonction $x \mapsto -\sqrt{|x|}$ est paire). Ceci sélectionne la figure 5.

(b) *Fig.* $\boxed{8}$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 2x^2$.

Lorsque $|x|$ est grand, $x^3 \gg x^2$ et donc $g(x) := x^3 - 2x^2 \approx x^3$. Seules les figures 6 et 8 ont ce comportement. Lorsque $x \approx 0$, on a $x^3 \ll x^2$ d'où $g(x) \approx -2x^2$. Le graphe de cette fonction doit donc ressembler à une parabole tournée vers le bas lorsque x est proche de 0. Ceci sélectionne le graphe 8.

(c) *Fig.* $\boxed{7}$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{1/3} + x$.

Lorsque $|x|$ est grand, $x \gg x^{1/3}$ et donc $h(x) := x^{1/3} + x \approx x$. Comme pour (a), les seuls graphes qui ont ce comportement sont ceux portant le numéro 4, 5 et 7. Lorsque $x \approx 0$, $x \ll x^{1/3}$ et donc $h(x) \approx x^{1/3}$. Cette fonction $x \mapsto x^{1/3}$ est la fonction inverse de $x \mapsto x^3$ et son graphe est donc celui de x^3 où on a échangé les axes x et y. Par conséquent, $x \mapsto x^{1/3}$ possède une asymptotique verticale en $x = 0$. Seule la figure 7 a cette propriété.

Fig. 1

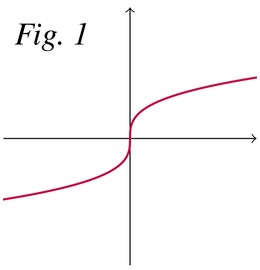


Fig. 2

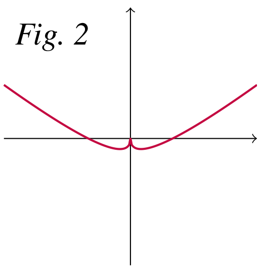


Fig. 3

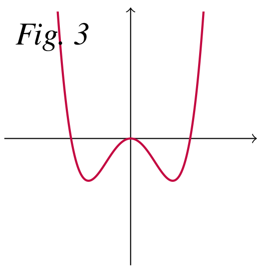


Fig. 4

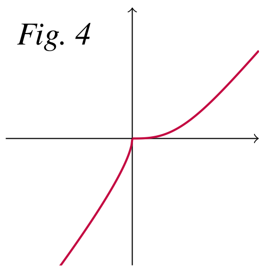


Fig. 5

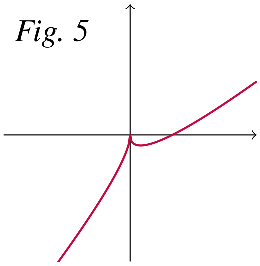


Fig. 6

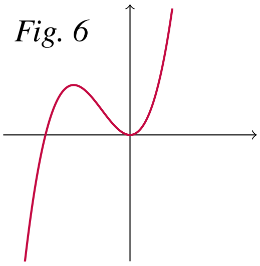


Fig. 7

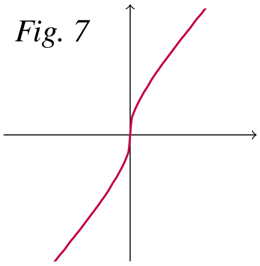
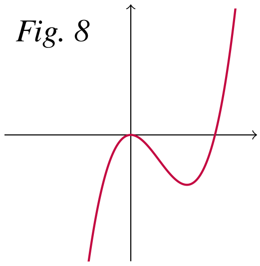


Fig. 8



Question 4.

(a) *Donnez la matrice $M \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ définie par*

$$M_{ij} = \begin{cases} i+j & \text{si } i \leqslant j, \\ 42 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a $M = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 & 1+4 & 1+5 \\ 42 & 2+2 & 2+3 & 2+4 & 2+5 \\ 42 & 42 & 3+3 & 3+4 & 3+5 \\ 42 & 42 & 42 & 4+4 & 4+5 \\ 42 & 42 & 42 & 42 & 5+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 42 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 42 & 42 & 6 & 7 & 8 \\ 42 & 42 & 42 & 8 & 9 \\ 42 & 42 & 42 & 42 & 10 \end{pmatrix}$

(b) *Soient les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Calculez, si possible, BC, AC^t et D^2.

Pour BC, nous avons à multiplier des matrices 3×1 et 1×2, ce qui nous donnera une matrice 3×2.

$$BC = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 & 1\cdot(-3) \\ 2\cdot 1 & 2\cdot(-3) \\ 3\cdot 1 & 3\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}.$$

Pour AC^t, nous devons multiplier des matrices 2×2 et 2×1, ce qui nous donnera une matrice 2×1.

$$AC^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 - 1\cdot(-3) \\ 0\cdot 1 + 1\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Pour D^2, remarquons que $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$. On a

$$\begin{aligned} D^2 = D\cdot D &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} & 1+\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3} \\ 1+\operatorname{cis}\frac{8\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3} & 1+\operatorname{cis}\frac{8\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3} & 1+\operatorname{cis}\frac{6\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{6\pi}{3} \\ 1+\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3} & 1+\operatorname{cis}\frac{6\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{6\pi}{3} & 1+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{8\pi}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

car $\operatorname{cis}\theta\cdot\operatorname{cis}\theta' = \operatorname{cis}(\theta+\theta')$. Or, $1+\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3} = 1+\operatorname{cis}\frac{8\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3} = 1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2} = 0$ et $1+\operatorname{cis}\frac{6\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{6\pi}{3} = 1+\operatorname{cis}2\pi+\operatorname{cis}2\pi = 1+1+1 = 3$.

Donc, $D^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 5. *Les relations ci-dessous sont-elles des fonctions ? Lorsque vous répondez positivement, donnez le domaine et l'image de la fonction.*

(a) $f : \mathbb{R}^2 \multimap \mathscr{D} : (a,b) \mapsto D$ *tel que* D *est la droite d'équation* $ax+by=1$. *Le symbole* $\mathscr{D}$ *représente l'ensemble des droites du plan de coordonnées* (x,y).

La relation f est une fonction. En effet, pour chaque $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, il existe au plus une droite qui a pour équation $ax+by=1$. Le domaine de f est l'ensemble des couples $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $ax+by=1$ soit l'équation d'une droite (puisque l'élément correspondant à (a,b) doit appartenir à $\mathscr{D}$). C'est le cas pour tous les (a,b) sauf pour $(a,b)=(0,0)$. Donc,

$$\operatorname{Dom} f = \big\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \bigm| (a,b)\neq(0,0)\big\} = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

Par définition, l'image de f est l'ensemble des droites $f(a,b)$ avec $(a,b)\neq(0,0)$, c'est-à-dire l'ensemble des droites D qui possèdent une équation du type $ax+by=1$ pour un certain $(a,b)\neq(0,0)$. Formellement,

$$\operatorname{Im} f = \big\{D\in\mathscr{D} \bigm| D \equiv ax+by=1 \text{ pour } (a,b)\neq(0,0)\big\}.$$

Montrons que $\operatorname{Im} f$ est identique à

$$\mathscr{D}_0 := \big\{D\in\mathscr{D} \bigm| (0,0)\notin D\big\}$$

(autrement dit, $\mathscr{D}_0$ est constitué de toutes les droites ne passant pas par l'origine). Montrons en détail que $\operatorname{Im} f = \mathscr{D}_0$.

- $\operatorname{Im} f \subseteq \mathscr{D}_0$. Soit $D\in\operatorname{Im} f$, on sait donc que D possède une équation du type $ax+by=1$. Si on remplace (x,y) par $(0,0)$, on obtient $a\cdot0+b\cdot0=1$. Comme cette dernière égalité n'est pas vraie, $(0,0)\notin D$ et par conséquent $D\in\mathscr{D}_0$.

- $\mathscr{D}_0 \subseteq \operatorname{Im} f$. Soit $D \in \mathscr{D}_0$. Comme D est une droite, elle posède une équation du type $ax + by + c = 0$ pour certains $(a,b) \neq (0,0)$ et $c \in \mathbb{R}$. Montrons que $c \neq 0$. Si au contraire $c = 0$, l'équation deviendrait $ax + by = 0$. Mais alors, en remplaçant (x,y) par $(0,0)$ on voit que $(0,0) \in D$, ce qui contredit le fait que $D \in \mathscr{D}_0$.
  Par conséquent, on peut réécrire l'équation de D comme
  $$\frac{a}{-c}x + \frac{b}{-c}y = 1$$
  ce qui montre que $D = f\left(\frac{a}{-c}, \frac{b}{-c}\right)$. On a donc bien $D \in \operatorname{Im} f$.

(b) *$g : \mathbb{C} \multimap \mathbb{C} : z \mapsto w$ tel que $w^2 = z$ et $Re(w) \geqslant 0$.*

La relation g n'est pas une fonction. En effet, à $z = -1$, correspond w tel que w soit solution de l'équation $w^2 = -1$ et vérifie $\operatorname{Re}(w) \geqslant 0$. Or, $w = \boldsymbol{i}$ et $w = -\boldsymbol{i}$ satisfont tous deux ces conditions. À $z = -1$ correspond donc plus d'une valeur w ce qui invalide la définition de fontion.

Question 6.

(a) *Donnez la forme trigonométrique du nombre complexe $2 - 2\boldsymbol{i}$ et représentez-le dans le plan complexe.*

(b) *Donnez la forme trigonométrique de $-1 - \boldsymbol{i}$ et représentez-le dans le plan complexe.*

(c) *Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^3 = 2 - 2\boldsymbol{i}$. Donnez les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique. Représentez-les dans le plan complexe.*

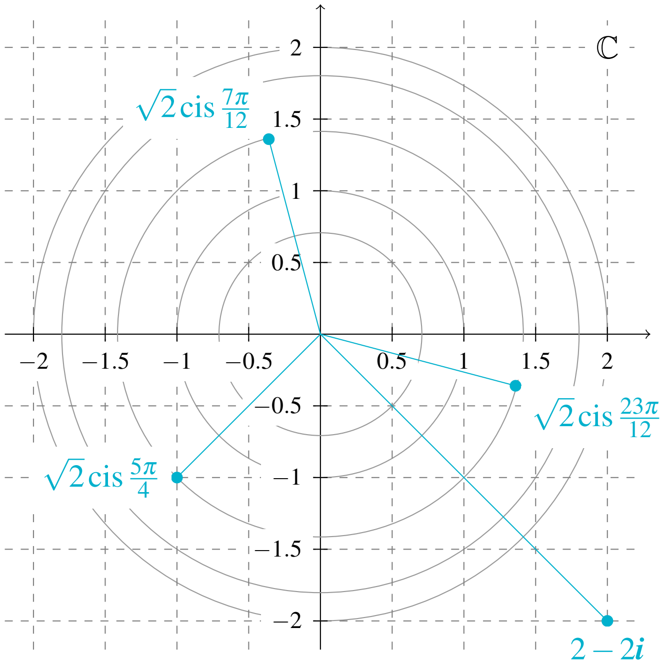
(a) $2 - 2\boldsymbol{i} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\right) = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}$

(b) $-1 - \boldsymbol{i} = \sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}$

(c) On a $2-2\boldsymbol{i} = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}$. Par conséquent, une solution particulière de l'équation est $z_0 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{12}$. En effet,

$$z_0^3 = \sqrt{2}^3 \operatorname{cis}\frac{21\pi}{12} = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}.$$

Les solutions de $X^3 = 2-2\boldsymbol{i}$ sont données par $z_0 \cdot u$ avec $u^3 = 1$ (vu au cours), c'est-à-dire z_0, $z_0 \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$ et $z_0 \operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$. C'est-à-dire $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{12}$, $\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)$ ou encore $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{12}$, $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{15\pi}{12} = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}$ et $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{23\pi}{12}$.



Sous forme algébrique (cartésienne), $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\right) = -1-\boldsymbol{i}$ et donc

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{23\pi}{12} &= (-1-\boldsymbol{i})\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} \\
&= (-1-\boldsymbol{i})\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right) \\
&= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\boldsymbol{i} \\
&= \frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{12} &= \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}\left(\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^{-1} \\
&= (-1-\boldsymbol{i})\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right) \\
&= \frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}.
\end{aligned}$$

Question 7. *Donnez la négation de « si je vais à Barcelone, alors je ne vais pas en Espagne ».*

Je vais à Barcelone et je vais en Espagne.