Mathématiques Élémentaires

Test n$^\circ$ 6 (22 octobre 2012)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez les dérivées suivantes : /3

- $\partial_x\left(\dfrac{\cos(xy)}{\sqrt{\sin x}}\right) =$

- $\partial_y\left(e^{xy^2} + \cos\dfrac{x}{y}\right) =$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Échelonnez la matrice suivante en discutant au besoin en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$: /4

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Esquissez le graphe des fonctions ci-dessous. Justifiez votre dessin en explicitant les caractéristiques des fonctions qui ont guidé votre esquisse. L'évaluation de la fonction en au plus deux points peut être utilisée comme partie de la justification. /4

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + \sqrt{x}$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^x - x - 1$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4.

/5

(a) Calculez, si possible, la matrice M dont l'inverse est la matrice

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Déduisez du point précédent l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 19 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -38 \end{cases}$$

Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 5. Les propositions suivantes sont-elles des tautologies ? Justifiez votre réponse. $/3$

(a) $A \Rightarrow A$

(b) $\big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P\big) \Leftrightarrow \big(P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)\big)$

Mathématiques Élémentaires

Test n° 6 (22 octobre 2012)

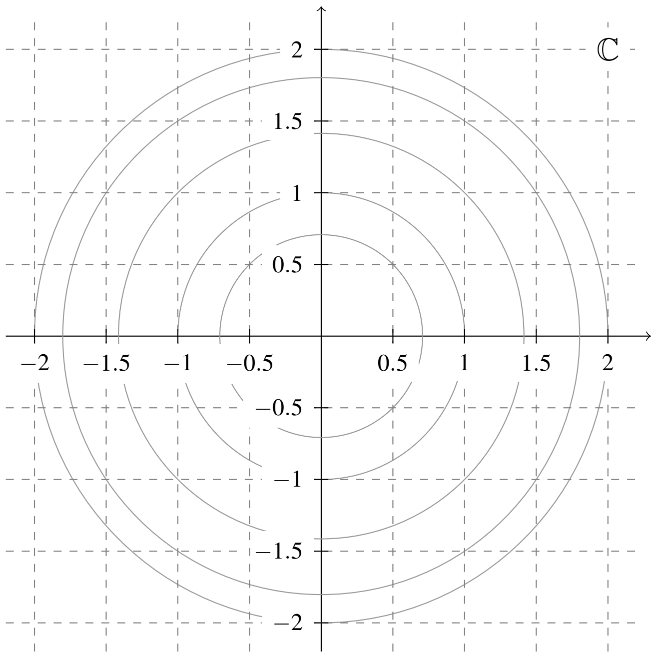
Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. /5

(a) Donnez les solutions dans $\mathbb{C}$ (sous forme trigonométrique uniquement) de $X^4 = -1$. Représentez-les dans le plan.

(b) Sans donner les solutions de $X^2 = \boldsymbol{i}$, prouvez que si α est solution de $X^2 = \boldsymbol{i}$, alors α est solution de $X^4 = -1$.

(c) Sur le dessin ci-dessous, représentez les solutions de $X^2 = \boldsymbol{i}$ en utilisant le point (b). Expliquez votre démarche.



Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Les relations ci-dessous sont-elles des fonctions ? Lorsque vous répondez positivement, donnez le domaine et l'image de la fonction. /3

(a) $g : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y$ tel que $y^3 = x$.

(b) $h : \mathbb{C} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{C} : x \mapsto y$ tel que $y^3 = x$.

Mathématiques Élémentaires

Test n° 6 (22 octobre 2012)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. $\big/ 3$

(a) Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Définissez « B est l'inverse de A ».

(b) Soit la matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Supposons que $ad - bc \neq 0$. En utilisant la définition donnée au point précédent, montrez que l'inverse de M est

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Question 9. $\big/ 4$

(a) $\sum_{t=2}^{n} t =$

(b) $\sum_{i=-1}^{15} 2 =$

(c) $\sum_{i=0}^{10} (i^2+2) =$

(d) $\sum_{i=-2}^{10} (i^2+2) =$