Mathématiques Élémentaires

Test n° 6 (22 octobre 2012) **Correction**

Question 1. *Calculez les dérivées suivantes :*

- $\partial_x\Big(\dfrac{\cos(xy)}{\sqrt{\sin x}}\Big) = \dfrac{-\sin(xy)y\sqrt{\sin x} - \cos(xy)\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cos x}{\sin x} = \dfrac{-y\sin(x)\sin(xy) - \frac{1}{2}\cos(xy)\cos(x)}{(\sin x)^{3/2}}$
- $\partial_y\Big(\mathrm{e}^{xy^2} + \cos\dfrac{x}{y}\Big) = \mathrm{e}^{xy^2}\,\partial_x(xy^2) + \partial_u(\cos u)\restriction_{u=x/y}\partial_y\Big(\dfrac{x}{y}\Big) = \mathrm{e}^{xy^2}\,2xy + \Big(-\sin\dfrac{x}{y}\Big)\Big(-\dfrac{x}{y^2}\Big)$
  $= 2xy\,\mathrm{e}^{xy^2} + \dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}$

Question 2. *Échelonnez la matrice suivante en discutant au besoin en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Échelonnons cette matrice en lui appliquant des transformations élémentaires sur ses lignes. On a

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

Appelons M cette dernière matrice.

- Si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -1$ alors on a

  $$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{1+\lambda} & \frac{1}{1+\lambda} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2/(1-\lambda^2) \\ L_3 \leftarrow L_3/(1-\lambda) \end{matrix}$$

  où la deuxième ligne a pu être divisée par $1-\lambda^2$ car $1-\lambda^2 \neq 0$ et la troisième a pu être divisée par $1-\lambda$ car $\lambda \neq 1$.

  $$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{1+\lambda} & \frac{1}{1+\lambda} \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda-2}{1+\lambda} & \frac{-1}{\lambda+1} \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2.$$

Si $\lambda \neq -2$ alors on a

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{1+\lambda} & \frac{1}{1+\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda+2} \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 \cdot \frac{1+\lambda}{-\lambda-2}.$$

Si $\lambda = -2$ alors on a $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Si $\lambda = 1$ alors M devient $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Si $\lambda = -1$ alors M devient

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2/2 \\ L_3 \leftarrow L_3/2. \end{array}$$

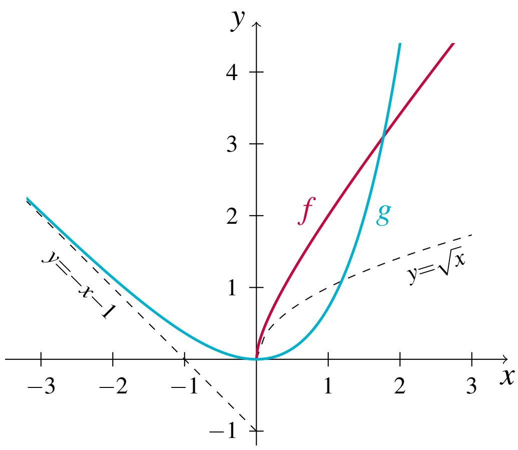
Question 3. *Esquissez le graphe des fonctions ci-dessous. Justifiez votre dessin en explicitant les caractéristiques des fonctions qui ont guidé votre esquisse. L'évaluation de la fonction en au plus deux points peut être utilisée comme partie de la justification.*

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + \sqrt{x}$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^x - x - 1$

(a) Commençons par remarquer que, vu la présence du terme $\sqrt{x}$, la fonction f n'est définie que sur $[0, +\infty[$. Lorsque $x \approx 0$, x est très petit relativement à $\sqrt{x}$ (i.e. $x/\sqrt{x} \approx 0$) et donc $f(x) \approx \sqrt{x}$. Au contraire, quand $x \to +\infty$, x domine $\sqrt{x}$ et donc $f(x) \approx x$. Ces considérations mènent au graphe ci-contre.

(b) La fonction g est définie sur tout $\mathbb{R}$. Lorsque $x \to -\infty$, e^x se rapproche rapidement de 0 et donc $g(x) \approx -x - 1$. Lorsque $x \to +\infty$, l'exponontielle croît bien plus rapidement que $x + 1$ et par conséquent $g(x) \approx e^x$. Finalement, on remarque que $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$. Ceci donne la forme du graphe de g.



Question 4.

(a) *Calculez, si possible, la matrice M dont l'inverse est la matrice*

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b) *Déduisez du point précédent l'ensemble des solutions du système*

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 19 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -38 \end{cases}$$

Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

(a) Par définition de l'inverse, on a $M \cdot M^{-1} = \mathrm{Id} = M^{-1} \cdot M$. On en déduit que M est l'inverse de M^{-1}. Calculons l'inverse de M^{-1} par la méthode de la matrice compagnon.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_3 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 15 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 15 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2/2 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3/19 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{19} & \frac{1}{38} & \frac{4}{19} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} \frac{-5}{19} & \frac{-5}{38} & \frac{-1}{19} \\ \frac{-4}{19} & \frac{15}{38} & \frac{3}{19} \\ \frac{1}{19} & \frac{1}{38} & \frac{4}{19} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \qquad \begin{pmatrix} \frac{-9}{19} & \frac{5}{19} & \frac{2}{19} \\ \frac{-4}{19} & \frac{15}{38} & \frac{3}{19} \\ \frac{1}{19} & \frac{1}{38} & \frac{4}{19} \end{pmatrix} = M$$

(b) Le système s'écrit sous forme matricielle : $M^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ -38 \end{pmatrix}$.

On a donc $M \cdot M^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ -38 \end{pmatrix}$.

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-9}{19} & \frac{5}{19} & \frac{2}{19} \\ \frac{-4}{19} & \frac{15}{38} & \frac{3}{19} \\ \frac{1}{19} & \frac{1}{38} & \frac{4}{19} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ -38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9-4 \\ -4-6 \\ 1-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -10 \\ -7 \end{pmatrix}$$

et l'ensemble des solutions est $\{(-13, -10, -7)\}$.

Question 5. *Les propositions suivantes sont-elles des tautologies ? Justifiez votre réponse.*

(a) $A \Rightarrow A$ *(b)* $\big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P\big) \Leftrightarrow \big(P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)\big)$

(a) $A \Rightarrow A \equiv \neg A \vee A$ qui est toujours vraie. En effet, il s'agit d'une disjonction ($\vee$) et une disjonction est vraie dès que l'un des termes est vrai (ici $\neg A$ est vrai si A est faux et réciproquement).

(b) On a vu au cours que $A \Leftrightarrow B$ est une tautologie si et seulement si A et B ont même table de vérité. On a

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P \equiv \neg(P \Rightarrow Q) \vee P \equiv (P \wedge \neg Q) \vee P. \tag{1}$$

De même, on a

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P) \equiv \neg P \vee (Q \Rightarrow P) \equiv \neg P \vee (\neg Q \vee P) \equiv (\neg P \vee P) \vee \neg Q. \tag{2}$$

Comme $\neg P \vee P$ est toujours vrai, (2) est une tautologie. En ce qui concerne (1), elle n'est pas une tautologie puisque ce sera faux si Q est vrai et que P est faux. Les deux membres de l'équivalence n'ont pas la même table de vérité et par conséquent la proposition de départ n'est pas une tautologie.

REMARQUE : une autre solution consiste à dresser les tables de vérité de $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$ et $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ et à remarquer qu'elles sont différentes.

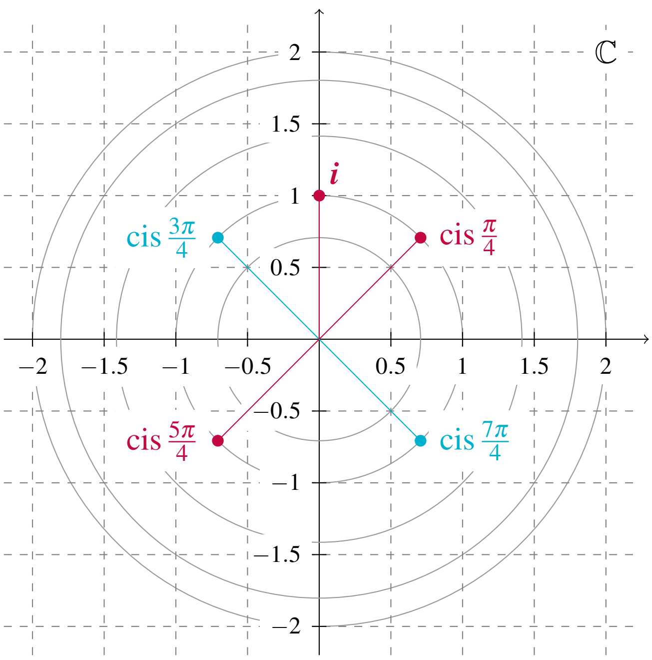
Question 6.

(a) *Donnez les solutions dans $\mathbb{C}$ (sous forme trigonométrique uniquement) de $X^4 = -1$. Représentez-les dans le plan.*

(b) *Sans donner les solutions de $X^2 = \boldsymbol{i}$, prouvez que si α est solution de $X^2 = \boldsymbol{i}$, alors α est solution de $X^4 = -1$.*

(c) *Sur le dessin ci-dessous, représentez les solutions de $X^2 = \boldsymbol{i}$ en utilisant le point (b). Expliquez votre démarche.*

(a) Puisque $-1 = \operatorname{cis}\pi$, on remarque que $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ est une solution particulière. En effet, par la formule de De Moivre, $\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)^4 = \operatorname{cis} 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \operatorname{cis}\pi = -1$. Par conséquent, les solutions de $X^4 = -1$ sont (vu le théorème vu au cours) $\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right) \cdot u$ avec $u^4 = 1$, c'est-à-dire $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\operatorname{cis}\pi$ et $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$. C'est-à-dire $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$, $\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}$ et $\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}$.



(b) On a $\alpha^4 = \left(\alpha^2\right)^2 = \boldsymbol{i}^2 = -1$. Donc, α est solution de $X^4 = -1$ et aussi α^2 est solution de $X^2 = -1$ puisque $\boldsymbol{i}^2 = -1$.

(c) L'ensemble des solutions est un sous-ensemble de l'ensemble des solutions données au premier point. En testant les quatre valeurs, on remarque que les solutions sont cis $\frac{\pi}{4}$ et cis $\frac{5\pi}{4}$.

Question 7. *Les relations ci-dessous sont-elles des fonctions ? Lorsque vous répondez positivement, donnez le domaine et l'image de la fonction.*

(a) $g : \mathbb{R} \multimap \mathbb{R} : x \mapsto y$ *tel que* $y^3 = x$.

(b) $h : \mathbb{C} \multimap \mathbb{C} : x \mapsto y$ *tel que* $y^3 = x$.

(a) Il s'agit d'une fonction. En effet, à un x réel correspond au plus un y réel vérifiant $y^3 = x$. Il s'agit de $y = \sqrt[3]{x}$. Comme l'équation $y^3 = x$ a une solution réelle pout tout $x \in \mathbb{R}$, le domaine est $\mathbb{R}$. Par ailleurs, quel que soit $y \in \mathbb{R}$, il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = y$. En effet, il suffit de prendre $x = y^3$. Par conséquent l'image de g est $\mathbb{R}$.

(b) Il ne s'agit pas d'une fonction. En effet, il existe au moins une valeur $x \in \mathbb{C}$ telle que l'équation $y^3 = x$ possède au moins deux solutions dans $\mathbb{C}$. Considérons $x = 1$. Nous avons vu au cours que l'équation $y^3 = 1$ possède trois solutions différentes dans $\mathbb{C}$.

Question 8.

(a) *Soit* $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Définissez « B est l'inverse de A ».*

(b) *Soit la matrice* $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ *où* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. *Supposons que* $ad - bc \neq 0$. *En utilisant la définition donnée au point précédent, montrez que l'inverse de M est*

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(a) B est l'inverse de A si $A \cdot B = \mathrm{Id} = B \cdot A$.

(b) Posons $B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Montrons que $M \cdot B = \mathrm{Id} = B \cdot M$. On a

$$M \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-cd & -bc+da \end{pmatrix}$$

par définition du produit matriciel. Dès lors,

$$M \cdot B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

par définition de la multiplication d'une matrice par un réel. On montre de manière analogue que $B \cdot M = \mathrm{Id}$.

Question 9.

(a) $\sum_{t=2}^{n} t = \big(\sum_{t=0}^{n} t\big) - 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1.$

(b) $\sum_{i=-1}^{15} 2 = 17 \cdot 2 = 34$

(c) $\sum_{i=0}^{10} (i^2+2) = \sum_{i=0}^{10} i^2 + \sum_{i=0}^{10} 2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 11 \cdot 2 = 407.$

(d) $\sum_{i=-2}^{10} (i^2+2) = \sum_{i=0}^{10} (i^2+2) + \sum_{i=-2}^{-1} (i^2+2) = 407 + 9 = 416.$