Mathématique Élémentaire

Examen (28 octobre 2013)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculer $/4$

- $|1-\boldsymbol{i}|$
- $|(1-\boldsymbol{i})^{10}|$
- $(1-\boldsymbol{i})^{-1}$
- $(1-\boldsymbol{i})^{-4}$
- $(3+\boldsymbol{i})(1-\boldsymbol{i})^2$
- $(7-\boldsymbol{i})-(3+7\boldsymbol{i})$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Calculez, si possible,

/5

(a) $\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}^{-1} =$

(b) $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -d \\ 0 & 0 & d & c \end{pmatrix} =$

(c) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$

(d) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} =$

(e) $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} =$

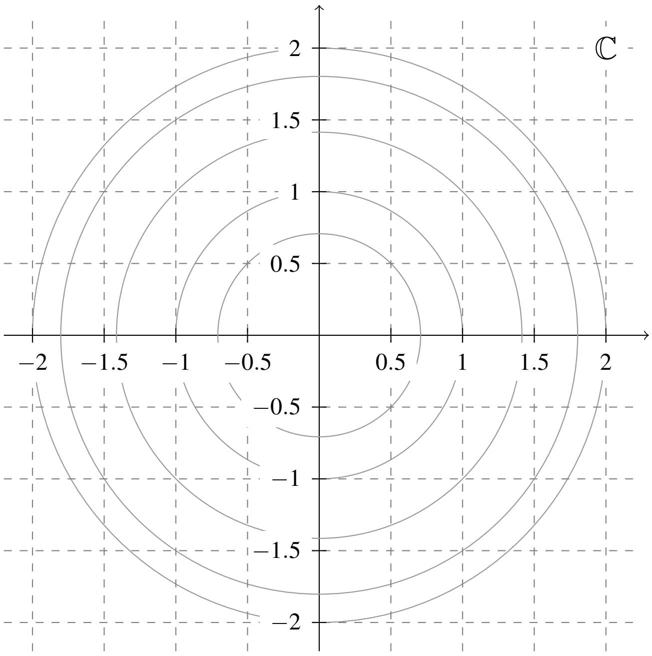
Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Donnez toutes les solutions complexes de l'équation $Z^3 = -8\boldsymbol{i}$ sous forme trigonométrique, sous forme $a+b\boldsymbol{i}$ et placez-les sur le dessin ci-dessous.

/6



Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. Calculez /2

(a) $\displaystyle\sum_{j=-3}^{\ell}(2j+j^2)$

(b) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}(kj+1)$

Question 5. /2

(a) Donnez la table de vérité de $(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)$.

(b) La réciproque de la formule précédente est-elle une tautologie ?

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Prouvez par récurrence sur n que $3n^2+3n+1 \leqslant n^3$ dès que $n \geqslant 4$.

/5

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Calculez :

/6

- $\partial_t \left(x + t\cos(\mathrm{e}^{tx}), \dfrac{\sqrt{x^2+t^2}}{t^x} \right)$

- $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

- $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$

Nom :

Prénom :

Section :

/5

Question 8. En se rappelant qu'une fonction[1] f, est décroissante sur un intervalle $[a,b] \subseteq \operatorname{Dom} f$ si et seulement si $\forall x \in \,]a,b[, \ \partial f(x) \leqslant 0$, déterminez les intervalles (les plus grands possibles) sur lesquels la fonction définie ci-dessous est décroissante :

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{1+x}-1)^2} - \big(\sqrt{1+x}+1\big)^4.$$

Explicitez et justifiez les différentes étapes de vos calculs.

[1] On verra ultérieurement que f doit être supposée continue sur son domaine et dérivable sur tout intervalle ouvert inclus à son domaine pour que l'affirmation soit correcte.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 9. Soient les matrices $S,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définies par /3

$$S_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leqslant j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad B_{ij} = (i-j)^{2013} + S_{ij}.$$

Calculez $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{ij}$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto px^2 + 1$ où $p \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Pour quelle(s) valeur(s) de p les tangentes au graphe de f aux points d'abscisse -1 et 1 sont-elles perpendiculaires. Pour chacun de ces p, donnez le point d'intersection de ces deux tangentes. /5

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11.

/4

(a) Prouvez que si u est solution de l'équation $Z^n = 1$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, u^k est également solution de l'équation $Z^n = 1$.

(b) Prouvez la réciproque du point précédent.

(c) Prouvez que les solutions de $Z^n = 1$ sont les nombres complexes $\left(\operatorname{cis}\frac{2\pi}{n}\right)^k$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ (vous pouvez utiliser les résultats vus au cours).

Nom :
Prénom :
Section :

Question 12. Soit la matrice

/10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda+1 & \lambda & -\lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ peut-on calculer l'inverse de A ?

(b) Calculez l'inverse de A pour les valeurs trouvées au point précédent.

(c) Soit le système :

$$\begin{cases} x+y+\lambda z = 0, \\ (\lambda+1)x+\lambda y-\lambda z = \lambda, \\ x+\lambda y+z = 2\lambda. \end{cases}$$

Résolvez le système lorsque $\lambda = -3$ et lorsque $\lambda = -1$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 12 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.