Mathématique Élémentaire

Examen (10 janvier 2014)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez $/4$

- $(3+\boldsymbol{i})-(17-27\boldsymbol{i}) =$

- $|1+2\boldsymbol{i}| =$

- $|(1+2\boldsymbol{i})^{14}| =$

- $\operatorname{Arg} 4 =$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Soient les matrices

/4

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \left((-1)^{i+j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 3}}$$

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ ab & 0 & 0 \\ b & a & b \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ca & b & c^2 \end{pmatrix}.$$

Calculez AB, détC, DE et dét(DE).

Mathématique Élémentaire

Examen (10 janvier 2014)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. La proposition suivante est-elle une tautologie ? /3

$$\big((P \wedge \neg Q) \Rightarrow R\big) \Leftrightarrow \big(P \Rightarrow (Q \vee R)\big)$$

Justifiez votre réponse.

Question 4. Calculez /5

- $\displaystyle\sum_{v=-3}^{j} \frac{v(v+1)}{2} =$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{t}\sum_{\ell=0}^{t}(k^2-\ell^2+1) =$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Donnez en bon français la négation de « Si je vais en vacances, alors j'apprends l'anglais ». Justifiez votre réponse. /2

Question 6. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par /4

$$A_{ij} = \begin{cases} 2^i \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

(a) Calculez $\sum_{i=1}^{n} A_{ii}$.

(b) Calculez $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Prouvez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$, $\left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=0}^{n} i^3$. /3

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. En se rappelant qu'une fonction[1] f, est décroissante sur un intervalle $[a,b] \subseteq \operatorname{Dom} f$ si et seulement si $\forall x \in]a,b[,\ \partial f(x) \leqslant 0$, déterminez les intervalles (les plus grands possibles) sur lesquels la fonction définie ci-dessous est décroissante : /5

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{1+x}-1)^2} - \left(\sqrt{1+x}+1\right)^4.$$

Explicitez et justifiez les différentes étapes de vos calculs.

[1]On verra ultérieurement que f doit être supposée continue sur son domaine et dérivable sur tout intervalle ouvert inclus à son domaine pour que l'affirmation soit correcte.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 8 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 9. On considère la courbe C dans le plan X-Y paramétrée par la fonction /3

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\sin(2t), \mathrm{e}^{\sqrt{t}} \cos t\right)$$

Donnez tous les points de C en lesquels la tangente (si elle existe) est parallèle à l'axe des Y.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Soit le système

/7

$$\begin{cases} (m+1)x+my+mz=m \\ x+my+z=2m \\ x+y+mz=0 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de m le système possède-t-il une solution unique ?

(b) Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de A pour $m=-5$.

(c) En utilisant le point (b), donnez l'ensemble des solutions du système lorsque $m=-5$.

(d) Résolvez le système en fonction de m uniquement dans le cas où le déterminant de la matrice des coefficients est nul.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Nom :
Prénom :
Section :

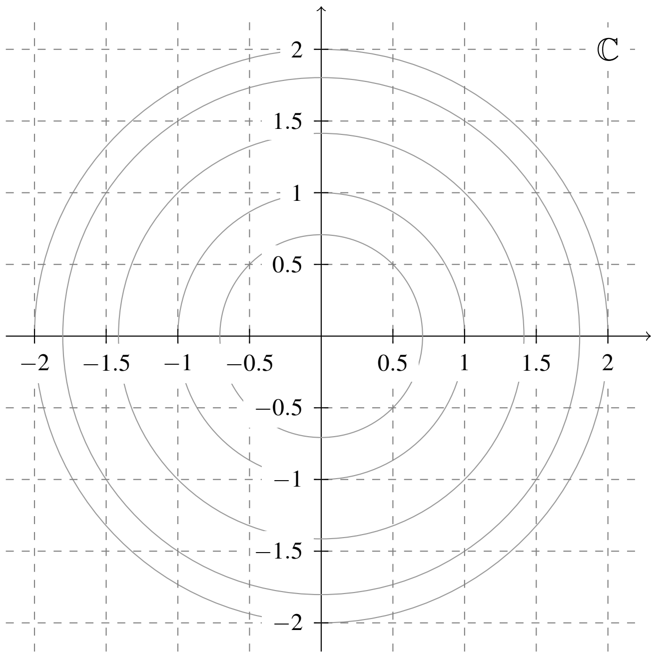
Question 11.

/5

(a) Donnez les solutions dans $\mathbb{C}$ (sous forme trigonométrique uniquement) de $X^4 = -1$. Représentez-les dans le plan.

(b) Sans donner les solutions de $X^2 = \boldsymbol{i}$, prouvez que si α est solution de $X^2 = \boldsymbol{i}$, alors α est solution de $X^4 = -1$.

(c) Sur le dessin ci-dessous, représentez les solutions de $X^2 = \boldsymbol{i}$ en utilisant le point (b). Expliquez votre démarche.



Nom :

Prénom :

Section :

Question 12. Dans le plan muni d'un repère orthogonal X-Y, on considère la droite D d'équation $ax+by=c$. Donnez des conditions sur a, b, c pour que

/4

(a) D passe par l'origine du repère ;

(b) D ne soit pas parallèle à l'axe des x ;

(c) D soit parallèle à la droite D_1 d'équation $y = 2x+1$.