Mathématique Élémentaire

Examen (6 juin 2014)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto x^2$. Trouvez tous les $x_0\in\mathbb{R}$ tels que la tangente au graphe de f en $\big(x_0, f(x_0)\big)$ ne soit pas horizontale et coupe l'axe des x en x_0+1. /4

Mathématique Élémentaire

Examen (6 juin 2014)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. /3

(a) La proposition $(P \vee Q) \wedge (Q \vee R) \Rightarrow R$ est-elle une tautologie ?

(b) Donnez, en bon français, la négation et la contraposée de la phrase suivante : « Si j'assiste à tous les cours pendant l'année, alors je réussis les examens ».

Question 3. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice définie par $A_{ij} = (\ln i - \ln j)^3 \cdot (i+j)^2$. /4

(a) Montrez que A est antisymétrique.

(b) Calculez $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$. Expliquez votre démarche.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. Prouver par récurrence sur k que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

/4

$$\partial_x^k \left(\frac{1}{1+x} \right) = \frac{(-1)^k \, k!}{(1+x)^{k+1}}$$

où, pour rappel, le symbole « ∂_x^k » signifie qu'on dérive l'expression k fois par rapport à x.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Soient les ensembles $A \subseteq \mathbb{R}$ et $B \subseteq \mathbb{R}$ définis par

/6

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |x-1| \leqslant 4 \text{ et } |\sqrt{x-2} - 1| \leqslant 1 \right\},$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sqrt{x-1} \leqslant 2 \text{ et } \sin|\sqrt{x-2} - 1| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

(a) A-t-on $0 \in A$? Justifiez.

(b) A-t-on $2 \in A$? Justifiez.

(c) Écrivez A sous la forme d'une union d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est) non-vides (éventuellement non-bornés) disjoints.

(d) Prouvez que $A \subseteq B$.

Nom :

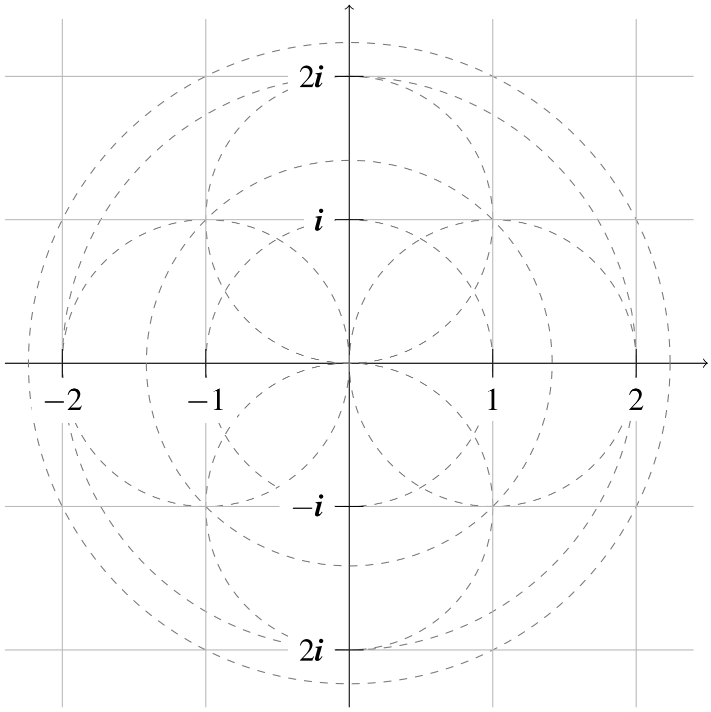
Prénom :

Section :

Question 6. Calculez, dans $\mathbb{C}$, sous forme trigonométrique et sous forme algébrique, les solutions de l'équation /4

$$X^3 + 1 = 0 \tag{1}$$

Représentez ces solutions sur le graphe ci-dessous. Justifiez vos calculs.



Nom :

Prénom :

Section :

Question 6 (suite). Poursuivez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.

Question 7. Calculez /5

- $\sum_{v=-3}^{j} v(v+2) =$

- $\sum_{k=4}^{n} 4 =$

- $\sum_{k=0}^{t} \sum_{\ell=0}^{t} (k^2 - \ell^2 + 1) =$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. On considère la courbe C dans le plan X-Y paramétrée par la fonction

/3

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\mathrm{e}^{2t}, \mathrm{e}^{t}\right).$$

Donnez tous les points de C en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Question 9. Calculez les intégrales suivantes en explicitant votre démarche.

/4

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x =$

- $\displaystyle\int_1^3 x^2 \ln x \,\mathrm{d}x =$

Nom :

Prénom :

Section :

/4

Question 10. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \left((-1)^{i+j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 3}}$$

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ ab & 0 & 0 \\ b & a & b \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ca & b & c^2 \end{pmatrix}.$$

Calculez AB, détC et dét(DE).

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 11.

/7

(a) Calculer

- $\overline{1-\boldsymbol{i}} =$
- $\overline{2+3\boldsymbol{i}} =$
- $\left|(1+\boldsymbol{i})^{10}\right| =$
- $\overline{(1-\boldsymbol{i})(2+3\boldsymbol{i})} =$

(b) Donnez la forme trigonométrique de $1-\boldsymbol{i}$ et $\overline{1-\boldsymbol{i}}$.

(c) En utilisant les propriétés vues au cours pour le conjugué, prouvez que, si $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ et si $z \in \mathbb{C}$ vérifie

$$a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \tag{2}$$

alors

$$a_4 \bar{z}^4 + a_3 \bar{z}^3 + a_2 \bar{z}^2 + a_1 \bar{z} + a_0 = 0. \tag{3}$$

(d) Déduire de (c) que si $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ et z est solution dans $\mathbb{C}$ de

$$a_4 X^4 + a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = 0 \tag{4}$$

alors $\bar{z}$ est également solution de (4).

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12. Soit le système

/7

$$\begin{cases} (\lambda+1)x+\lambda y+\lambda z=\lambda \\ x+\lambda y+z=2\lambda \\ x+y+\lambda z=0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède-t-il une solution unique ?

(b) Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de A pour $\lambda = -4$.

(c) En utilisant le point (b), donnez l'ensemble des solutions du système lorsque $\lambda = -4$.

(d) Résolvez le système en fonction de λ uniquement dans le cas où le déterminant de la matrice des coefficients est nul.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.