Mathématique Élémentaire

Examen (23 août 2014)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez /5

- $\sum_{k=2}^{p}(2+k^2) =$

- $\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{p=1}^{k}(1+k) =$

- $\sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{p}(1+m) =$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Calculez, si possible,

/5

(a) $\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}^{-1} =$

(b) $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -d \\ 0 & 0 & d & c \end{pmatrix} =$

(c) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$

(d) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} =$

(e) $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} =$

Mathématique Élémentaire

Examen (23 août 2014)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. $/4$

(a) Donnez la table de vérité de $A \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow (B \wedge \neg C)$.

(b) Donnez, en bon français, la négation de la proposition suivante : « si $\sqrt{2}$ est rationnel, alors $1+\sqrt{2}$ est rationnel ».

Question 4. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leqslant f(n+1)$. Montrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(n) \leqslant f(n+k)$. $/4$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

/5

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Écrivez l'ensemble $\Sigma := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < x\}$ sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (éventuellement non-bornés).

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + px + q$ où $p, q \in \mathbb{R}$. Déterminez les valeurs de p et q pour lesquelles la droite d'équation $y = x - 1$ est tangente au graphe de f au point $(3, 2)$. /5

Question 7. Calculez /4

- $(3 + \boldsymbol{i}) - (17 - 27\boldsymbol{i}) =$
- $|1 + 2\boldsymbol{i}| =$
- $|(1 + 2\boldsymbol{i})^{14}| =$
- $\operatorname{Arg} 4 =$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8.

/4

(a) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice antisymétrique. Montrez que, quel que soit $i \in \{1,\dots,n\}$, on a $A_{ii} = 0$.

(b) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculez $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^2 - j^2 + A_{ij})$. Expliquez votre démarche.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9. Dans le plan X-Y, on considère la courbe C paramétrée par la fonction /3

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(e^{2t}, e^{t}\right).$$

Donnez tous les points de C en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Question 10. Calculez les intégrales suivantes en explicitant votre démarche. /4

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx =$

- $\displaystyle\int_1^3 x^2 \ln x \,dx =$

Mathématique Élémentaire

Examen (23 août 2014)

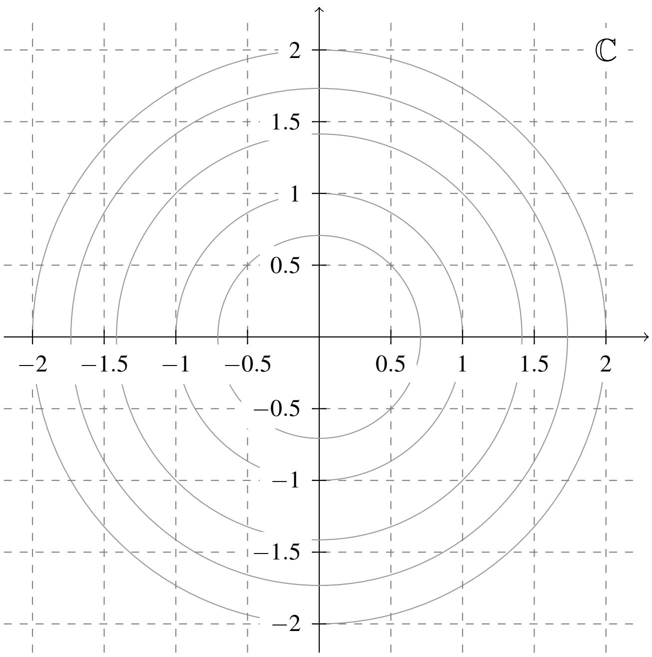
Nom :

Prénom :

Section :

Question 11. Résolvez l'équation suivante dans $\mathbb{C}$: $X^6 = -27$. Détaillez votre méthode. Donnez les solutions sous forme trigonométrique et algébrique. Représentez ces solutions dans le plan.

/8



Nom :

Prénom :

Section :

/7

Question 12. Soit le système

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède-t-il une solution unique ?

(b) Soit $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de M pour $\lambda = 3$.

(c) Résolvez le système en fonction de λ uniquement dans le(s) cas où le déterminant de la matrice des coefficients est nul.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 12 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 13. /4

(a) Prouvez que si u est solution de l'équation $Z^n = 1$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, u^k est également solution de l'équation $Z^n = 1$.

(b) Prouvez la réciproque du point précédent.

(c) Prouvez que les solutions de $Z^n = 1$ sont les nombres complexes $\left(\operatorname{cis} \frac{2\pi}{n}\right)^k$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ (vous pouvez utiliser les résultats vus au cours).