

Mathématique Élémentaire

Test n° 2

(23 septembre 2013)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Veillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez dans \mathbb{C} ,

■ $(1 + 3i)\left(\frac{1}{3} - i\right) =$

■ $(2 - i) - (-7 + i) =$

■ $|2 - i| =$

■ $\overline{2 - i} =$

■ $(2 - i)^{-1} =$

■ $|(2 - i)^6| =$

/6

Question 2. Soient $u = (4, -3)$ et $v = (-2, -1)$.

(a) Calculez

■ $\frac{v}{2} - 3u =$

■ $\left\| \frac{u}{\|v\|} \right\| =$

■ $(u|v) =$

■ la distance entre u et v .

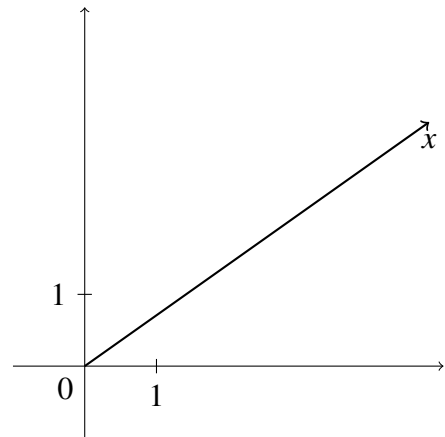
(b) Recherchez un vecteur de norme 1 qui a la même direction et le même sens que v .

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

/5

Question 3. Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^N$.

- (a) Définissez la norme de u , notée $\|u\|$, et le produit scalaire de u et v , noté $(u|v)$.
- (b) Montrez que $(u + v|w) = (u|w) + (v|w)$. Détaillez votre raisonnement et citez les propriétés que vous utilisez.
- (c) Calculez $\|u\|$ si on suppose maintenant que $u \in \mathbb{R}$.
- (d) Soit $x \in \mathbb{R}^2$ le vecteur représenté ci-dessous. Construisez, sur ce même graphique, le vecteur $v = x/\|x\|$. Expliquez comment vous réalisez votre construction.



Mathématique Élémentaire

Test n° 2 (23 septembre 2013)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 4. Prouvez que $2 - i$ est solution de l'équation $X^2 - (1 + i)X + 5i = 0$.

/2

Question 5. Prouvez que $P_1 \Rightarrow P_2$ et $\neg P_2 \Rightarrow \neg P_1$ sont des propositions équivalentes.

/2

Nom : _____
Prénom : _____
Section : _____

Question 6. En utilisant la méthode vue au cours résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation

$$5X^2 + (2i)X - 1 = 0. \tag{1}$$

/3

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 7. Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

/4

(a) Complétez les phrases suivantes :

$v = 0$ ssi

$v \neq 0$ ssi

(b) Soit $u \in \mathbb{R}^2$ le vecteur défini par $u = (\lambda^3 - \lambda^2, \lambda^2 + \lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de λ a-t-on $u = 0$? Expliquez votre raisonnement et détaillez vos calculs.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 8.

/5

(a) Prouver que¹ $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$.

(b) Prouver que $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{z^3} = \overline{z}^3$.

¹Pour rappel, le symbole « \forall » se lit « pour tout ».