Mathématique Élémentaire

Test n° 2 (23 septembre 2013) **Correction**

Question 1. *Calculez dans* $\mathbb{C}$,

- $(1+3\boldsymbol{i})(\frac{1}{3}-\boldsymbol{i}) = (1+3\boldsymbol{i})(1-3\boldsymbol{i})\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(1^2-(3\boldsymbol{i})^2) = \frac{1}{3}(1+9) = \frac{10}{3}$
- $(2-\boldsymbol{i})-(-7+\boldsymbol{i}) = 2-\boldsymbol{i}+7-\boldsymbol{i} = 9-2\boldsymbol{i}$
- $|2-\boldsymbol{i}| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$
- $\overline{2-\boldsymbol{i}} = 2+\boldsymbol{i}$
- $(2-\boldsymbol{i})^{-1} = \frac{\overline{2-\boldsymbol{i}}}{|2-\boldsymbol{i}|^2} = \frac{2+\boldsymbol{i}}{5} = \frac{2}{5}+\frac{1}{5}\boldsymbol{i}$ par la règle $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
- $|(2-\boldsymbol{i})^6| = |2-\boldsymbol{i}|^6 = (\sqrt{5})^6 = 5^3 = 125$ par la règle $|z^n| = |z|^n$

Question 2. *Soient* $u = (4,-3)$ *et* $v = (-2,-1)$.

(a) *Calculez*

- $\dfrac{v}{2}-3u =$
- $\left\|\dfrac{u}{\|v\|}\right\| =$
- $(u|v) =$
- *la distance entre u et v.*

(b) *Recherchez un vecteur de norme* 1 *qui a la même direction et le même sens que v.*

(a)
- $$\begin{aligned} \frac{v}{2}-3u &= \frac{1}{2}(-2,-1)-3(4,-3) && \text{(déf. de } u \text{ et de } v\text{)} \\ &= (-1,-\frac{1}{2})+(-12,9) && \text{(déf. de la multiplication d'un vecteur par un scalaire)} \\ &= (-1-12,-\frac{1}{2}+9) && \text{(déf. de l'addition dans } \mathbb{R}^2\text{)} \\ &= (-13,\frac{17}{2}) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \left\|\frac{u}{\|v\|}\right\| &= \frac{1}{\|v\|}\|u\| && \text{(car } \forall\lambda\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}^2, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \text{ et } \|v\|\geqslant 0\text{)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(-2)^2+1^2}}\sqrt{4^2+(-3)^2} && \text{(déf. de la norme)} \\ &= \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \end{aligned}$$
- $(u|v) = 4(-2)+(-3)(-1) = -8+3 = -5$ (déf. du produit scalaire)
- la distance entre u et v : il faut calculer $\|u-v\|$. Or, $u-v = \big(4-(-2),-3-(-1)\big) = (6,-2)$. Donc, $\|u-v\| = \sqrt{6^2+(-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

(b) Le vecteur $\frac{v}{\|v\|}$ est de norme 1 (vu au cours). Comme $\frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\|v\|}\|v\|$ et que $\frac{1}{\|v\|} > 0$, on multiplie donc v par un réel strictement positif, ce qui conserve la direction et le sens de v. Par conséquent, $\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,-1) = \left(\frac{-2\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5}\right)$ est un vecteur de norme 1 qui a la même direction et le même sens que v.

Question 3. *Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^N$.*

(a) *Définissez la norme de u, notée $\|u\|$, et le produit scalaire de u et v, noté $(u|v)$.*

Posons $u = (u_1, \ldots, u_N)$, $v = (v_1, \ldots, v_N)$ et $w = (w_1, \ldots, w_N)$. On a

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_N^2} \qquad \text{et} \qquad (u|v) = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_Nv_N.$$

(b) *Montrez que $(u+v|w) = (u|w) + (v|w)$. Détaillez votre raisonnement et citez les propriétés que vous utilisez.*

On a

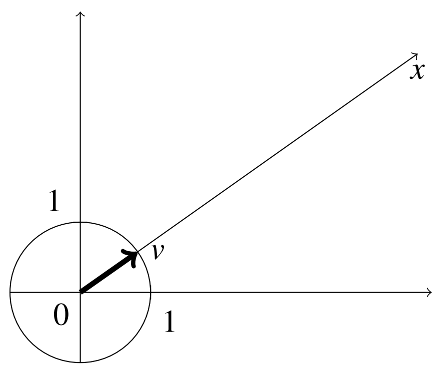
$$\begin{aligned}
(u+v|w) &= \big((u_1,\ldots,u_N) + (v_1,\ldots,v_N) \bigm| (w_1,\ldots,w_N)\big) && \text{(déf. de } u, v \text{ et } w) \\
&= \big((u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_N+v_N) \bigm| (w_1, w_2, \ldots, w_N)\big) && \text{(déf. de l'addition dans } \mathbb{R}^N) \\
&= (u_1+v_1)w_1 + (u_2+v_2)w_2 + \cdots + (u_N+v_N)w_N && \text{(déf. du produit scalaire)} \\
&= u_1w_1 + v_1w_1 + u_2w_2 + v_2w_2 + \cdots + u_Nw_N + v_Nw_N && \text{(distributivité dans } \mathbb{R}) \\
&= u_1w_1 + u_2w_2 + \cdots + u_Nw_N + v_1w_1 + v_2w_2 + \cdots + v_Nw_N && \text{(commutativité de + dans } \mathbb{R}) \\
&= (u|w) + (v|w) && \text{(déf. du produit scalaire)}
\end{aligned}$$

(c) *Calculez $\|u\|$ si on suppose maintenant que $u \in \mathbb{R}$.*

Si $u \in \mathbb{R}$, alors $u = u_1$. Donc, $\|u\| = \sqrt{u_1^2} = |u_1| = |u|$.

(d) *Soit $x \in \mathbb{R}^2$ le vecteur représenté ci-dessous. Construisez, sur ce même graphique, le vecteur $v = x/\|x\|$. Expliquez comment vous réalisez votre construction.*

Comme $\|v\| = 1$ (vu au cours) et que $v = x/\|x\|$ a même direction et même sens que x (puisque $\|x\| > 0$), v est le vecteur d'origine $(0,0)$, de même direction et même sens que x et dont l'extrémité est sur le cercle unité.



Question 4. *Prouvez que $2-\boldsymbol{i}$ est solution de l'équation $X^2-(1+\boldsymbol{i})X+5\boldsymbol{i}=0$.*

Le complexe $(2-\boldsymbol{i})$ est solution de l'équation si et seulement si (par définition de « solution »)

$$(2-\boldsymbol{i})^2-(1+\boldsymbol{i})(2-\boldsymbol{i})+5\boldsymbol{i}=0.$$

C'est-à-dire si

$$3-4\boldsymbol{i}-(3+\boldsymbol{i})+5\boldsymbol{i}=0.$$

Cette expression est équivalente à

$$(3-3)+(-4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{i})=0$$

qui est vérifiée.

Question 5. *Prouvez que $P_1 \Rightarrow P_2$ et $\neg P_2 \Rightarrow \neg P_1$ sont des propositions équivalentes.*

P_1	P_2	$P_1 \Rightarrow P_2$	$\neg P_2$	$\neg P_1$	$\neg P_2 \Rightarrow P_1$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

Les deux tables $P_1 \Rightarrow P_2$ et $\neg P_2 \Rightarrow \neg P_1$ sont égales, donc par définition les propositions sont équivalentes.

Question 6. *En utilisant la méthode vue au cours résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation*

$$5X^2+(2\boldsymbol{i})X-1=0. \tag{1}$$

Le discriminant de l'équation est $\Delta=(2\boldsymbol{i})^2-4\cdot 5(-1)=-4+20=16$. L'équation auxiliaire est donc $Y^2=16$ dont les solutions sont $Y_1=4$ et $Y_2=-4$. Par conséquent, les solutions de l'équation (1) sont $x_1=\frac{-2\boldsymbol{i}+4}{10}$ et $x_2=\frac{-2\boldsymbol{i}-4}{10}$ ou encore $x_1=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\boldsymbol{i}$ et $x_2=\frac{-2}{5}-\frac{1}{5}\boldsymbol{i}$.

Question 7. *Soit* $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

(a) *Complétez les phrases suivantes :*

$$v = 0 \quad ssi \quad \boxed{v_1 = 0 \text{ et } v_2 = 0}$$

$$v \neq 0 \quad ssi \quad \boxed{v_1 \neq 0 \text{ ou } v_2 \neq 0}$$

(b) *Soit* $u \in \mathbb{R}^2$ *le vecteur défini par* $u = (\lambda^3 - \lambda^2, \lambda^2 + \lambda)$ *où* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Pour quelle(s) valeur(s) de* λ *a-t-on* $u = 0$ *? Expliquez votre raisonnement et détaillez vos calculs.*

Par le point (a), $u = 0$ si et seulement si $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ <u>et</u> $\lambda^2 + \lambda = 0$. Or, on a $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ si et seulement si $\lambda^2(\lambda - 1) = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ (car $ab = 0$ ssi $a = 0$ ou $b = 0$).

On a également $\lambda^2 + \lambda = 0$ si et seulement si $\lambda(\lambda + 1) = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda = -1$.

Donc, $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ et $\lambda^2 + \lambda = 0$ sont vérifiés simultanément lorsque $\lambda = 0$.

En conclusion, $u = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$.

Question 8.

(a) *Prouver que*[1] $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$.

(b) *Prouver que* $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{z^3} = \overline{z}^3$.

(a) Posons $z_1 = a + b\boldsymbol{i}$ et $z_2 = c + d\boldsymbol{i}$. Le premier membre devient

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a + b\boldsymbol{i})(c + d\boldsymbol{i})}.$$

Par définition de la multiplication dans $\mathbb{C}$, il est égal à $\overline{(ac - bd) + (ad + bc)\boldsymbol{i}}$. Par définition du conjugué, cela devient $ac - bd - (ad + bc)\boldsymbol{i}$.

Le second membre devient $\overline{z_1}\ \overline{z_2} = \overline{a + b\boldsymbol{i}}\ \overline{c + d\boldsymbol{i}}$ qui, par définition du conjugué, est égal à $(a - b\boldsymbol{i})(c - d\boldsymbol{i})$. Par définition de la multiplication dans $\mathbb{C}$, il est égal à $(ac - bd) - (ad + bc)\boldsymbol{i}$. Ceci prouve l'égalité des deux membres.

(b) On a que $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$ pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Donc, si $z_1 = z_2 = z$ alors on a $\overline{z^2} = (\overline{z})^2$. On a également $z^3 = z^2 z$, donc

$$\overline{z^3} = \overline{z^2 z} = \overline{z^2}\ \overline{z} = \overline{z}^2\ \overline{z} = \overline{z}^3$$

par les propriétés sur les exposants.

[1] Pour rappel, le symbole « $\forall$ » se lit « pour tout ».