Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (30 septembre 2013) **Correction**

Question 1.

(a) *Calculez* $(4-3\boldsymbol{i})^{-1}$.

(b) *Calculez* z^{-2} *en fonction de* $\overline{z}$ *et* $|z|$. *Justifiez les différentes étapes de vos calculs.*

(a) $(4-3\boldsymbol{i})^{-1} = \frac{4+3\boldsymbol{i}}{4^2+(-3)^2} = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}\boldsymbol{i}$.

(b) On sait que $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Donc,

$$\begin{aligned} z^{-2} &= (z^{-1})^2 \\ &= \left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right)^2 = \frac{\overline{z}^2}{|z|^4}. \end{aligned}$$

Question 2. *Prouvez par récurrence que, pour tout naturel* $n \geqslant 1$,

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad |z^{-n}| = |z|^{-n}.$$

Commençons par le cas de base $n = 1$. Nous devons montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $|z^{-1}| = |z|^{-1}$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, nous savons que $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Comme $|\overline{z}| = |z|$ et comme $|z|^2$ est un réel positif, nous obtenons $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|^2}|z| = |z|^{-1}$.

Admettons par récurrence que l'assertion est vérifiée pour tout $n = 1, \dots, k$ où $k \in \mathbb{N}_0$. Montrons que l'assertion reste vraie pour $n = k+1$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, nous devons montrer que $|z^{-(k+1)}| = |z|^{-(k+1)}$. Par la règle « module d'un produit » et les règles sur les exposants, nous obtenons que

$$|z^{-(k+1)}| = |z^{-k}z^{-1}| = |z^{-k}| \cdot |z^{-1}|.$$

Par hypothèse de récurrence, nous avons que $|z^{-k}| = |z|^{-k}$ et $|z^{-1}| = |z|^{-1}$. Dès lors, par les règles sur les exposants, nous pouvons conclure que

$$|z^{-(k+1)}| = |z|^{-(k+1)}.$$

Question 3. *Pour chacune des affirmations suivantes, dites si elle est vraie ou fausse. Justifiez brièvement votre choix.*

(a) *La condition d'existence de* $\sqrt{x}$ *est* $\sqrt{x} \geqslant 0$.

(b) $\sqrt{4} = \pm 2$ *car* ± 2 *sont les solutions de* $x^2 = 4$.

(a) La première assertion est fausse. En effet, $\sqrt{x}$ existe si on peut trouver un réel y tel que $y^2 = x$. Ceci n'est vrai que si $x \geqslant 0$ (le carré d'un nombre réel est toujours positif). La condition d'existence porte donc sur l'argument présent sous le symbole racine carrée et pas sur la racine carrée elle-même.

(b) La deuxième assertion est fausse. En effet, $\sqrt{x}$ est définie (si elle existe, voir point précédent), comme étant la valeur réelle <u>positive</u> y telle que $y^2 = x$. Cette solution est donc unique lorsqu'elle existe. Dans le cas de 4, nous avons donc que $\sqrt{4} = 2$.

Question 4. *Montrez que* $\sqrt{5}$ *n'est égal à aucune fraction rationnelle.*

La question signifie « montrer que $\forall a > 0,\ \forall b > 0,\ a, b \in \mathbb{N},\ \sqrt{5} \neq a/b$ ». On peut supposer $a, b > 0$ car $\sqrt{5} > 0$ (pouvez-vous le justifier ?). Démontrons-le par l'absurde, c'est-à-dire, supposons que l'énoncé est faux (ou encore que sa négation est vraie) et essayons d'en déduire une contradiction. Supposons par l'absurde que « $\exists a > 0,\ \exists b > 0,\ a,\ b \in \mathbb{N}, \sqrt{5} = a/b$ » et essayons d'en déduire une contradiction. On a que $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}_0$ si et seulement si $5 = \frac{a^2}{b^2}$ (car on travaille dans les réels positifs) si et seulement si $5b^2 = a^2$ avec les deux membres naturels. On sait que 5 est premier dans $\mathbb{N}$. Posons $l = a^2 = 5b^2 \in \mathbb{N}$. Donc, 5 est un facteur premier de l, c'est-à-dire 5 divise a^2, avec a^2 qui est un produit de nombres premiers (comme tout naturel, théorème démontré au cours). Puisque $a^2 = a \cdot a$ et que $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ avec $p_1, \cdots, p_k$ premiers et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}_0$, on aura $a^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdots p_k^{2\alpha_k}$ qui sera sa décomposition en facteurs premiers. On en conclut que les exposants des p_i sont tous pairs dans la décomposition de a^2. Le même argument montre que les exposants des nombres premiers apparaissant dans la décomposition de b^2 sont pairs.

De ce qui précède, 5 apparait comme un facteur premier dans la décomposition de a^2, on en déduit que l'exposant de 5 doit être pair.

D'autre part, a^2 a la même décomposition en facteurs premiers que $5b^2$ et donc l'exposant de 5 dans $5b^2$ doit être pair. J'en déduis que 5 apparait dans la décomposition en facteurs premiers de b^2. Mais l'exposant de 5 dans b^2 doit être pair car b^2 est un carré et donc l'exposant de 5 dans $5b^2$ est impair.

Conclusion, l'hypothèse par l'absurde nous a amené à conclure que l'exposant de 5 dans la décomposition en facteurs premiers de $l = 5b^2 = a^2$ est à la fois pair et impair. Cela n'existe pas, c'est la contradiction.

Question 5.

(a) Donnez la table de vérité de $(\neg p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge q)$.

(b) Prouvez que la proposition $(\neg p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge q)$ *est équivalente à* $q \Rightarrow p$.

Voir correction du Test 5, 17 octobre 2011, Question 6.

Question 6. *Écrivez l'ensemble des solutions de*

$$3(\sqrt{x}) + 1 \leqslant x \tag{1}$$

sous la forme d'une union disjointe d'intervalles.

Les conditions d'existence nous disent tout d'abord que seuls les $x \geqslant 0$ doivent être considérés (présence de la racine carrée).
Une manière équivalente d'écrire l'inéquation est de demander pour quel(s) réel(s) x nous avons $3\sqrt{x} \leqslant x - 1$. Comme le membre de gauche est positif, le membre de droite doit également l'être pour obtenir éventuellement des solutions. Dès lors, nous nous restreignons à $x - 1 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \geqslant 1$.
En passant au carré des deux côtés de l'inégalité (le signe ne change pas car la fonction carrée est croissante sur les réels positifs), nous devons vérifier quand $9x \leqslant x^2 - 2x + 1$, c'est-à-dire quand $x^2 - 11x + 1 \geqslant 0$. Les règles de calcul sur la résolution des inéquations polynomiales de degré deux nous disent que $x \leqslant \frac{11-\sqrt{117}}{2}$ ou $x \geqslant \frac{11+\sqrt{117}}{2}$.
Comme $x \geqslant 1$ et que $\frac{11-\sqrt{117}}{2} < 1$ (car $10 < \sqrt{117} < 11$), nous obtenons que les solutions de l'inéquation donnée sont les réels x vérifiant $x \geqslant \frac{11+\sqrt{117}}{2}$. L'ensemble des solutions est donc

$$\Big[\frac{11+\sqrt{117}}{2}, +\infty\Big[.$$

Question 7.

(a) Donnez une équation cartésienne de la droite D_1 *passant par* $(-5,4)$ *et perpendiculaire à la droite* D *passant par les points* $(-1,1)$ *et* $(3,9)$.

Un vecteur directeur de D est $(-1-3, 1-9) = (-4,-8)$. Comme D_1 et D sont perpendiculaires, $(-4,-8)$ sera un vecteur normal de D_1. Par conséquent, une équation cartésienne de D_1 sera de la forme $-4x - 8y = c$, où $c \in \mathbb{R}$. Comme $(-5,4) \in D_1$, on trouve c en remplaçant x par -5 et y par -4 dans cette équation. On a : $-4 \cdot (-5) - 8 \cdot 4 = c$, c'est-à-dire $c = 20 - 32 = -12$. Donc $D_1 \equiv -4x - 8y = -12$ ou encore $D_1 \equiv x + 2y = 3$.

(b) *Donnez une équation paramétrique de l'axe des abscisses.*

Un vecteur directeur de l'axe des abscisses est de la forme $(k,0)$ où $k \in \mathbb{R}_0$. Prenons par exemple $(1,0)$. Comme $(0,0)$ est un point de l'axe des abscisses, une équation paramétrique est donnée par

$$(x,y) = (0,0) + \lambda(1,0),$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Question 8. *Soient les ensembles*

$$A = \{(\alpha, \alpha+3) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \qquad et \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ((x,y)|(3,-1)) = 4\}.$$

Représentez graphiquement chaque ensemble et expliquez votre construction.

L'ensemble A est constitué des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

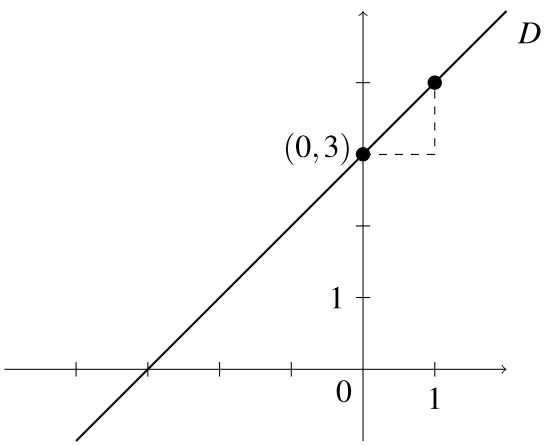
$$(x,y) = (\alpha, \alpha+3)$$

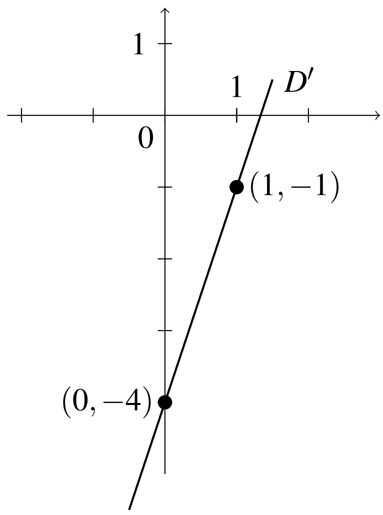
pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$(x,y) = (0,3) + \alpha(1,1),$$

pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. L'ensemble A décrit donc la droite D passant par $(0,3)$ et dont un vecteur directeur est $(1,1)$.

L'ensemble B est constitué des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $3x - y = 4$ (par définition du produit scalaire). Il s'agit d'une équation cartésienne de la droite D' passant par les points $(0,-4)$ et $(1,-1)$.





Question 9. *Prouvez que*

(a) $\forall z \in \mathbb{C},\ z\bar{z} = |z|^2$.

(b) $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| = 0$ *ssi* $z = 0$.

(c) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ z_1 z_2 = 0$ *ssi* $z_1 = 0$ *ou* $z_2 = 0$.

(a) Posons $z = a + b\boldsymbol{i}$, donc $\bar{z} = a - b\boldsymbol{i}$. Il s'en suit que

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + b\boldsymbol{i}) \cdot (a - b\boldsymbol{i}) \\ &= a^2 - (b\boldsymbol{i})^2 \quad \text{(produit remarquable)} \\ &= a^2 + b^2 \\ &= \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = |z|^2. \end{aligned}$$

(b) Si $z = 0$ c'est-à-dire $z = 0 + 0\boldsymbol{i}$ alors clairement $|z| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$ ce qui prouve une direction de l'équivalence. Réciproquement, si $|z| = 0$, posons $z = a + b\boldsymbol{i}$ et donc on en déduit par définition du module que $\sqrt{a^2 + b^2} = 0$, ou encore $a^2 + b^2 = 0$ avec a^2 et b^2 des nombres réels. Par le fait qu'une somme de carrés dans $\mathbb{R}$ est nulle si et seulement si chacun des carrés est nul, on en déduit $a^2 = b^2 = 0$ ou encore $a = b = 0$ c'est-à-dire $z = 0 + 0\boldsymbol{i} = 0$.

(c) De nouveau, il y a une direction triviale, si $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$, le produit $z_1 \cdot z_2 = 0$. Réciproquement, supposons $z_1 \cdot z_2 = 0$. Prenons le module de chaque membre, on obtient $|z_1 \cdot z_2| = |0|$, c'est-à-dire $|z_1 \cdot z_2| = 0$. Par la règle « module d'un produit », on en déduit $|z_1||z_2| = 0$, par la règle du « produit nul » dans $\mathbb{R}$, on en déduit $|z_1| = 0$ ou $|z_2| = 0$, qui par le point précédent nous dit que cela entraîne $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$.