Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (30 septembre 2013) **Correction**

Question 1. *Complétez : « Lorsqu'on écrit un nombre complexe sous la forme trigonométrique $\rho \operatorname{cis}\theta$, la mesure principale de l'angle θ appartient à l'intervalle* $\boxed{[0,2\pi[}$ *. »*

Question 2. *Donnez en bon français la contraposée de la phrase « Si je réussis le test de novembre, alors je suis dispensé de l'examen ».*

Si je ne suis pas dispensé de l'examen, alors c'est que je n'ai pas réussi le test de novembre.

Question 3. *Soit la droite D passant par les points (α_1,β_1) et (α_2,β_2) où $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que $\alpha_1 \neq \alpha_2$ (il n'est par contre pas exclu que $\beta_1 = \beta_2$).*

(a) *Donnez, en fonction de $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$, un vecteur directeur et un vecteur normal de D.*

(b) *Donnez une équation cartésienne de D. Expliquez votre démarche.*

(c) *Donnez, en fonction de $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$, les coordonnées du point d'intersection entre D et l'axe des y.*

Voir correction du Test 3, 29 septembre 2010, Question5.

Question 4.

(a) *Sans résoudre les inéquations, expliquez pourquoi on n'a pas*

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad \sqrt{x} \leqslant x-1 \iff x \leqslant (x-1)^2.$$

Pour l'implication « $\Rightarrow$ », il faut que les deux membres (à savoir $\sqrt{x}$ et $x-1$) soient positifs. Ici, il se peut que $x-1<0$. Par exemple, pour $x=0$, on a que $\sqrt{x} \leqslant x-1$ devient $0 \leqslant -1$ — qui est faux — tandis que $x \leqslant (x-1)^2$ devient $0 \leqslant 1$ — qui est vrai. Donc, pour $x=0$, $\sqrt{x} \leqslant x-1$ n'est pas équivalent à $x \leqslant (x-1)^2$.

REMARQUE : $\sqrt{x} \leqslant x+1 \Leftrightarrow x \leqslant (x+1)^2$ sous les conditions d'existence $x \geqslant 0$. Il ne suffit donc pas de dire qu'il est *possible* que le membre de droite soit négatif, il faut exhiber un *cas explicite* où ça a lieu.

(b) *Écrivez l'ensemble A ci-dessous sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est). Expliquez les différentes étapes de votre résolution.*

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sqrt{x} \leqslant x - 1 \text{ et } \frac{1}{|x| - 1} \leqslant |x| \right\}.$$

Nous pourrions écrire A comme $A = \left\{ x \;\middle|\; \sqrt{x} \leqslant x - 1 \right\} \cap \left\{ x \;\middle|\; \frac{1}{|x|-1} \leqslant |x| \right\}$, résoudre chaque inéquation indépendamment et faire l'intersection mais nous allons adopter ci-après une démarche plus rapide.

Commençons par résoudre

$$\sqrt{x} \leqslant x - 1. \tag{1}$$

Les conditions d'existence nous donnent $x \geqslant 0$.

- Si $x - 1 < 0$ alors pas de solution car $\sqrt{x} \geqslant 0$.
- Si $x \geqslant 1$: Puisque $\sqrt{x} \geqslant 0$ et $x - 1 \geqslant 0$, on peut élever au carré sans modifier le sens de l'inégalité :

  $$x = (\sqrt{x})^2 \leqslant (x-1)^2$$

  c'est-à-dire

  $$x^2 - 3x + 1 \geqslant 0. \tag{2}$$

  Les racines de ce polynôme sont $\frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Donc x satisfait (2) si et seulement si $x \leqslant \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ou $x \geqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Comme on travaille avec $x \geqslant 1$ et que $2 \leqslant \sqrt{5} \leqslant 3$, les solutions pour ce cas sont $x \geqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

En conclusion : $\sqrt{x} \leqslant x - 1 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (si $x < 1$, pas de solution et si $x \geqslant 1$, seuls les $x \geqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ sont solutions).

Pour la seconde inéquation, il faudrait a priori résoudre

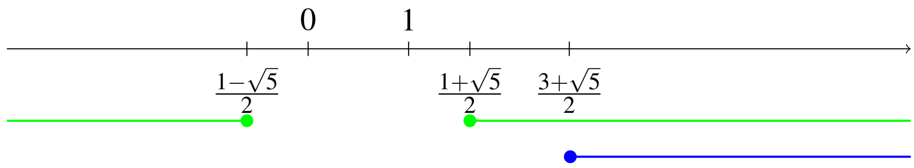
$$\frac{1}{|x| - 1} \leqslant |x|. \tag{3}$$

Cependant, ce qui nous intéresse sont les x tels qu'on ait simultanément $\sqrt{x} \leqslant x - 1$ et (3). Remarquons que si $\sqrt{x} \leqslant x - 1$ est faux, alors le « et » est faux quelle que soit la valeur de vérité de (3). On a donc juste besoin de résoudre (3) quand $\sqrt{x} \leqslant x - 1$ est vrai, c'est-à-dire quand $x \geqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Sous l'hypothèse $x \geqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (et donc $x \geqslant 1 \geqslant 0$), l'équation (3) devient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|x|-1} \leqslant |x| \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x-1} \leqslant x && \text{(car } x > 0\text{)} \\
&\Leftrightarrow \quad 1 \leqslant x(x-1) && \text{(car } x - 1 > 0\text{)} \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Les racines sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Donc (3) $\Leftrightarrow x \leqslant \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



On constate que, si $x \geqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, (3) est toujours vrai.

En conclusion,

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid (1) \text{ et } (3) \text{ sont vérifiées}\} \\ &= \{x \mid (1) \text{ est vérifiée}\} && \text{(car (3) est toujours vrai quand (1) est vrai)} \\ &= \left\{x \,\middle|\, x \geqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\} = \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[. \end{aligned}$$

Question 5.

- *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction où $D \subseteq \mathbb{R}$. Définissez « f est une fonction croissante ».*
- *Peut-on dire que la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto -1/x$ est croissante ? Justifiez votre réponse.*

(a) La fonction f est dite croissante si et seulement si, pour tout $x_1, x_2 \in D$ tels que $x_1 \leqslant x_2$, on a $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

(b) Non. En effet, bien que $-1 \leqslant 1$, on n'a **pas** $f(-1) \leqslant f(1)$ puisque $f(-1) = 1$ et $f(1) = -1$.

REMARQUE : Cette fonction est croissante sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ et sur l'intervalle $]0, +\infty[$ (mais, comme on vient de le montrer, pas sur l'union de ces deux intervalles).

Question 6. *Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.*

(a) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☐ *Le point $(\frac{1}{4}, \frac{7}{2})$ appartient à la droite $D \equiv (x, y) = (-5, 0) + \lambda(-3, -2)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(b) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☐ *Le vecteur $(\pi^{-1}, 2\pi^{-1})$ est un vecteur directeur de la droite $D \equiv x = y/2 - 5$.*

(c) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☐ *Les droites $D_1 \equiv (x, y) = (7, -1) + \mu(-3, -2)$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $D_2 \equiv -4x + 6y = 1$ sont confondues.*

Voir le test 3, 1er octobre 2012, question 3.

Question 7. *Calculez*

(a) *l'argument de* $1-\sqrt{3}\boldsymbol{i}$ *et* $\sqrt{3}+\boldsymbol{i}$

(b) *la forme trigonométrique de*

- $1-\sqrt{3}\boldsymbol{i} = \sqrt{1^2+3}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{3} = 2\operatorname{cis}\frac{5\pi}{3}$
- $\overline{1-\sqrt{3}\boldsymbol{i}} = 2\operatorname{cis}(\frac{-5\pi}{3} \mod 2\pi) = 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$
- $(1-\sqrt{3}\boldsymbol{i})^{-1} = \frac{1}{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$
- $-1+\sqrt{3}\boldsymbol{i} = 2\operatorname{cis}\big((\frac{5\pi}{3}+\pi) \mod 2\pi\big) = 2\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$

(c) *l'argument des complexes z qui vérifient l'équation* $\operatorname{Re} z = \sqrt{3}\operatorname{Im} z$. *Expliquez votre démarche.*

(a) Comme vu au cours, l'argument d'un complexe $a+b\boldsymbol{i}$ situé dans le quatrième quadrant est donné par $2\pi+\arctan\frac{b}{a}$. Dès lors, l'argument de $1-\sqrt{3}\boldsymbol{i}$ vaut $2\pi+\arctan(-\sqrt{3}) = 2\pi-\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Dans le premier quadrant, il vaut simplement $\arctan\frac{b}{a}$. Dès lors, l'argument de $\sqrt{3}+\boldsymbol{i}$ vaut $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.

(b) Voir énoncé.

(c) Travaillant dans le plan complexe, l'ensemble des z qui vérifient l'équation $\operatorname{Re} z = \sqrt{3}\operatorname{Im} z$ sont exactement ceux d'une droite passant par $z=0$. Pour trouver sa direction, il est suffisant de trouver un complexe non-nul vérifiant l'équation. Par exemple, $z=\sqrt{3}+\boldsymbol{i}$. Dès lors, les complexes situés sur la droite sont constitués de points du premier ou du troisième quadrant. Les complexes non-nuls situés dans le premier quadrant auront le même argument que celui de $\sqrt{3}+\boldsymbol{i}$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{6}$. Pour $z=0$, l'argument n'est pas défini et pour les complexes situés dans le troisième quadrant, il vaudra $\frac{\pi}{6}+\pi = \frac{7\pi}{6}$.

Question 8. *Soit le système*

$$\begin{cases} x-\lambda y+\lambda^2 = 0 \\ x+\lambda^2 y+\lambda = 0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) *Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède-t-il une infinité de solutions ? Expliquez votre raisonnement.*

(b) *Pour la ou les valeurs trouvées au point précédent, donnez l'ensemble des solutions du système.*

Voir test 4, 8 octobre 2012, question 2