

Mathématique Élémentaire

Test n° 4

(7 octobre 2013)

Correction

Question 1. Complétez : « Lorsqu'on écrit un nombre complexe sous la forme trigonométrique $\rho \operatorname{cis} \theta$, la mesure principale de l'angle θ appartient à l'intervalle $[0, 2\pi[$. »

Question 2. Donnez en bon français la contraposée de la phrase « Si je réussis le test de novembre, alors je suis dispensé de l'examen ».

Si je ne suis pas dispensé de l'examen, alors c'est que je n'ai pas réussi le test de novembre.

Question 3. Soit la droite D passant par les points (α_1, β_1) et (α_2, β_2) où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que $\alpha_1 \neq \alpha_2$ (il n'est par contre pas exclu que $\beta_1 = \beta_2$).

- (a) Donnez, en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, un vecteur directeur et un vecteur normal de D .
- (b) Donnez une équation cartésienne de D . Expliquez votre démarche.
- (c) Donnez, en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, les coordonnées du point d'intersection entre D et l'axe des y .

Voir correction du Test 3, 29 septembre 2010, Question 5.

Question 4.

- (a) Sans résoudre les inéquations, expliquez pourquoi on n'a pas

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad \sqrt{x} \leq x - 1 \Leftrightarrow x \leq (x - 1)^2.$$

Pour l'implication « \Rightarrow », il faut que les deux membres (à savoir \sqrt{x} et $x - 1$) soient positifs. Ici, il se peut que $x - 1 < 0$. Par exemple, pour $x = 0$, on a que $\sqrt{x} \leq x - 1$ devient $0 \leq -1$ — qui est faux — tandis que $x \leq (x - 1)^2$ devient $0 \leq 1$ — qui est vrai. Donc, pour $x = 0$, $\sqrt{x} \leq x - 1$ n'est pas équivalent à $x \leq (x - 1)^2$.

REMARQUE : $\sqrt{x} \leq x + 1 \Leftrightarrow x \leq (x + 1)^2$ sous les conditions d'existence $x \geq 0$. Il ne suffit donc pas de dire qu'il est possible que le membre de droite soit négatif, il faut exhiber un cas explicite où ça a lieu.

(b) Écrivez l'ensemble A ci-dessous sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est). Expliquez les différentes étapes de votre résolution.

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x} \leq x - 1 \text{ et } \frac{1}{|x| - 1} \leq |x| \right\}.$$

Nous pourrions écrire A comme $A = \left\{ x \mid \sqrt{x} \leq x - 1 \right\} \cap \left\{ x \mid \frac{1}{|x| - 1} \leq |x| \right\}$, résoudre chaque inéquation indépendamment et faire l'intersection mais nous allons adopter ci-après une démarche plus rapide.

Commençons par résoudre

$$\sqrt{x} \leq x - 1. \tag{1}$$

Les conditions d'existence nous donnent $x \geq 0$.

- Si $x - 1 < 0$ alors pas de solution car $\sqrt{x} \geq 0$.
- Si $x \geq 1$: Puisque $\sqrt{x} \geq 0$ et $x - 1 \geq 0$, on peut élever au carré sans modifier le sens de l'inégalité :

$$x = (\sqrt{x})^2 \leq (x - 1)^2$$

c'est-à-dire

$$x^2 - 3x + 1 \geq 0. \tag{2}$$

Les racines de ce polynôme sont $\frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Donc x satisfait (2) si et seulement si $x \leq \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ ou $x \geq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. Comme on travaille avec $x \geq 1$ et que $2 \leq \sqrt{5} \leq 3$, les solutions pour ce cas sont $x \geq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

En conclusion : $\sqrt{x} \leq x - 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ (si $x < 1$, pas de solution et si $x \geq 1$, seuls les $x \geq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ sont solutions).

Pour la seconde inéquation, il faudrait a priori résoudre

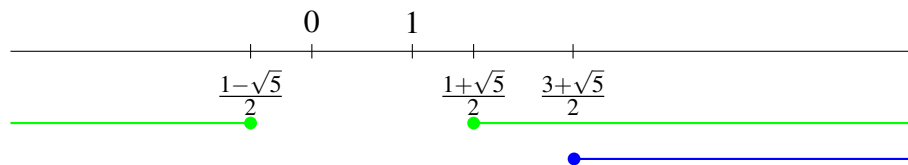
$$\frac{1}{|x| - 1} \leq |x|. \tag{3}$$

Cependant, ce qui nous intéresse sont les x tels qu'on ait simultanément $\sqrt{x} \leq x - 1$ et (3). Remarquons que si $\sqrt{x} \leq x - 1$ est faux, alors le « et » est faux quelle que soit la valeur de vérité de (3). On a donc juste besoin de résoudre (3) quand $\sqrt{x} \leq x - 1$ est vrai, c'est-à-dire quand $x \geq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Sous l'hypothèse $x \geq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ (et donc $x \geq 1 \geq 0$), l'équation (3) devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x| - 1} \leq |x| &\Leftrightarrow \frac{1}{x - 1} \leq x && \text{(car } x > 0) \\ &\Leftrightarrow 1 \leq x(x - 1) && \text{(car } x - 1 > 0) \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 1 \geq 0. \end{aligned}$$

Les racines sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Donc (3) $\Leftrightarrow x \leq \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ou $x \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.



On constate que, si $x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, (3) est toujours vrai.

En conclusion,

$$\begin{aligned}
 A &= \{x \mid (1) \text{ et } (3) \text{ sont vérifiées}\} \\
 &= \{x \mid (1) \text{ est vérifiée}\} && \text{(car (3) est toujours vrai quand (1) est vrai)} \\
 &= \left\{x \mid x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\} = \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right].
 \end{aligned}$$

Question 5.

- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction où $D \subseteq \mathbb{R}$. Définissez « f est une fonction croissante ».
- Peut-on dire que la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -1/x$ est croissante ? Justifiez votre réponse.

(a) La fonction f est dite croissante si et seulement si, pour tout $x_1, x_2 \in D$ tels que $x_1 \leq x_2$, on a $f(x_1) \leq f(x_2)$.

(b) Non. En effet, bien que $-1 \leq 1$, on n'a **pas** $f(-1) \leq f(1)$ puisque $f(-1) = 1$ et $f(1) = -1$.

REMARQUE : Cette fonction est croissante sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ et sur l'intervalle $]0, +\infty[$ (mais, comme on vient de le montrer, pas sur l'union de ces deux intervalles).

Question 6. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.

(a) Vrai : Faux : Le point $(\frac{1}{4}, \frac{7}{2})$ appartient à la droite $D \equiv (x, y) = (-5, 0) + \lambda(-3, -2)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Vrai : Faux : Le vecteur $(\pi^{-1}, 2\pi^{-1})$ est un vecteur directeur de la droite $D \equiv x = y/2 - 5$.

(c) Vrai : Faux : Les droites $D_1 \equiv (x, y) = (7, -1) + \mu(-3, -2)$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $D_2 \equiv -4x + 6y = 1$ sont confondues.

Voir le test 3, 1^{er} octobre 2012, question 3.

Question 7. Calculez

(a) l'argument de $1 - \sqrt{3}i$ et $\sqrt{3} + i$

(b) la forme trigonométrique de

- $1 - \sqrt{3}i = \sqrt{1^2 + 3} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3} = 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}$
- $\overline{1 - \sqrt{3}i} = 2 \operatorname{cis}(\frac{-5\pi}{3} \bmod 2\pi) = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$
- $(1 - \sqrt{3}i)^{-1} = \frac{1}{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$
- $-1 + \sqrt{3}i = 2 \operatorname{cis}((\frac{5\pi}{3} + \pi) \bmod 2\pi) = 2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$

(c) l'argument des complexes z qui vérifient l'équation $\operatorname{Re} z = \sqrt{3} \operatorname{Im} z$. Expliquez votre démarche.

(a) Comme vu au cours, l'argument d'un complexe $a + bi$ situé dans le quatrième quadrant est donné par $2\pi + \arctan \frac{b}{a}$. Dès lors, l'argument de $1 - \sqrt{3}i$ vaut $2\pi + \arctan(-\sqrt{3}) = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Dans le premier quadrant, il vaut simplement $\arctan \frac{b}{a}$. Dès lors, l'argument de $\sqrt{3} + i$ vaut $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.

(b) Voir énoncé.

(c) Travaillant dans le plan complexe, l'ensemble des z qui vérifient l'équation $\operatorname{Re} z = \sqrt{3} \operatorname{Im} z$ sont exactement ceux d'une droite passant par $z = 0$. Pour trouver sa direction, il est suffisant de trouver un complexe non-nul vérifiant l'équation. Par exemple, $z = \sqrt{3} + i$. Dès lors, les complexes situés sur la droite sont constitués de points du premier ou du troisième quadrant. Les complexes non-nuls situés dans le premier quadrant auront le même argument que celui de $\sqrt{3} + i$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{6}$. Pour $z = 0$, l'argument n'est pas défini et pour les complexes situés dans le troisième quadrant, il vaudra $\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$.

Question 8. Soit le système

$$\begin{cases} x - \lambda y + \lambda^2 = 0 \\ x + \lambda^2 y + \lambda = 0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède-t-il une infinité de solutions? Expliquez votre raisonnement.

(b) Pour la ou les valeurs trouvées au point précédent, donnez l'ensemble des solutions du système.

Voir test 4, 8 octobre 2012, question 2