Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (14 octobre 2013)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Prouvez par récurrence que $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} x^n & \partial_x(x^n) \\ 0 & x^n \end{pmatrix}$. /4

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. /5

(a) On dit que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice antisymétrique si $A^t = -A$ où A^t désigne la transposée de A. Donnez un exemple de matrice $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ qui est antisymétrique.

(b) Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice antisymétrique. Montrez que, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on a $M_{ii} = 0$.

(c) Soit $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par $N_{ij} = (j-i)^2$. La matrice N est-elle antisymétrique ? Justifiez votre réponse.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

/6

Question 3. Écrivez l'ensemble X suivant sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est). Justifiez les différentes étapes de votre raisonnement.

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \arcsin\left(\frac{3x + |x|}{4}\right) \leqslant \frac{\pi}{6} \right\}$$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 4. Soit la fonction $f(z) = \mathrm{e}^{a z^2 + a^2 z}$ où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Calculez $\partial_z f(-a)$. Justifiez les différentes étapes de votre calcul. /3

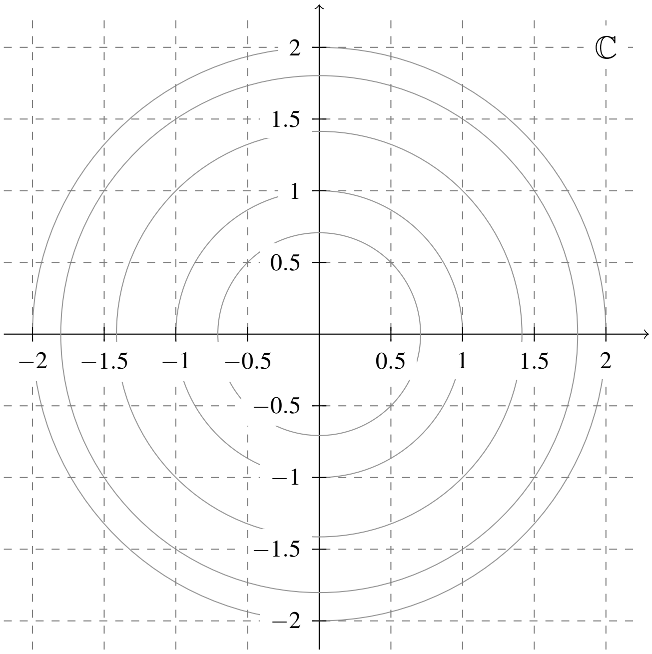
Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (14 octobre 2013)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

/6

Question 5. Donnez $z_n := \left(\frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$, pour $n \in \mathbb{N}$, sous forme trigonométrique et sous forme cartésienne (donnez des formules qui utilisent n modulo α pour un α bien choisi). Placez les points z_n dans le plan complexe.



Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (14 octobre 2013)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. /4

(a) Écrivez explicitement la matrice $M \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ définie par

$$M_{ij} = \begin{cases} 42 & \text{si } |i-j| \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calculez, si possible, AB, C^tB et AD.

Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (14 octobre 2013)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et z_0 une solution complexe de l'équation $Z^n = a + b\boldsymbol{i}$ avec $a + b\boldsymbol{i} \neq 0$. Prouvez que l'inverse de z_0 existe. /1

Question 8. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et z_0 une solution complexe de l'équation /3

$$Z^n = a + b\boldsymbol{i} \tag{1}$$

avec $a + b\boldsymbol{i} \neq 0$. Soit U_n l'ensemble des solutions de l'équation

$$Z^n = 1. \tag{2}$$

(a) Prouvez que si $u \in U_n$, alors $z_0 u$ est solution de (1).

(b) Soit z une solution de (1). Prouvez que $z_0^{-1} z$ est une solution de (2).

(c) Déduisez de (a) et (b) que l'ensemble des solutions de (1) est égal à $\{z_0 u \mid u^n = 1\}$.