Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (14 octobre 2013) **Correction**

Question 1. *Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Prouvez par récurrence que* $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} x^n & \partial_x(x^n) \\ 0 & x^n \end{pmatrix}$.

Voir Test 5, 17 octobre 2011, question 3.

Question 2.

(a) *On dit que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice antisymétrique si $A^t = -A$ où A^t désigne la transposée de A. Donnez un exemple de matrice $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ qui est antisymétrique.*

(b) *Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice antisymétrique. Montrez que, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on a $M_{ii} = 0$.*

(c) *Soit $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par $N_{ij} = (j-i)^2$. La matrice N est-elle antisymétrique ? Justifiez votre réponse.*

(a) Prenons $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice M est antisymétrique car

$$M^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = -M.$$

(b) Comme M est antisymétrique, on a que $\forall i, j \in \{1,\dots,n\}$, $M^t_{ij} = -M_{ij}$ ou encore $M_{ji} = -M_{ij}$ par définition de la transposée. Soit $i \in \{1,\dots,n\}$. Par ce qui précède, on a $M_{ii} = -M_{ii}$, c'est-à-dire $2M_{ii} = 0$, c'est-à-dire $M_{ii} = 0$.

(c) Soient $i, j \in \{1,\dots,n\}$. A-t-on $N^t_{ij} = -N_{ij}$? Non car

$$\begin{aligned} N^t_{ij} &= N_{ji} && \text{(par déf. de la transposée)} \\ &= (i-j)^2 && \text{(par déf. de } N\text{)} \\ &= \big(-(j-i)\big)^2 \\ &= (j-i)^2 \\ &= N_{ij}. \end{aligned}$$

Donc, N n'est pas une matrice antisymétrique.

Question 3. *Écrivez l'ensemble X suivant sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est). Justifiez les différentes étapes de votre raisonnement.*

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \arcsin\Bigl(\frac{3x+|x|}{4}\Bigr) \leqslant \frac{\pi}{6} \right\}$$

Tout d'abord intéressons nous aux conditions d'existence. En effet $\arcsin(y)$ est défini si et seulement si $y \in [-1,1]$. Par conséquent, pour que la propriété définissant l'ensemble ait un sens, il faut (et il suffit) que

$$-1 \leqslant \frac{3x+|x|}{4} \leqslant 1. \tag{1}$$

En ce qui concerne l'inéquation définissant X, remarquons que $\arcsin(y) \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $\pi/6 \in [-\pi/2, \pi/2]$ et que, sur $[-\pi/2, \pi/2]$, la fontion sinus est croissante. Dès lors

$$\arcsin\Bigl(\frac{3x+|x|}{4}\Bigr) \leqslant \frac{\pi}{6} \quad\Rightarrow\quad \frac{3x+|x|}{4} \leqslant \sin\Bigl(\frac{\pi}{6}\Bigr) = \frac{1}{2}.$$

Inversement, la fonction $\arcsin : [-1,1] \to \mathbb{R}$ est aussi croissante et donc, sous les conditions d'existence (1), on a

$$\frac{3x+|x|}{4} \leqslant \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \arcsin\Bigl(\frac{3x+|x|}{4}\Bigr) \leqslant \arcsin\Bigl(\frac{1}{2}\Bigr) = \frac{\pi}{6}.$$

En conclusion, on vient de montrer que

$$\arcsin\Bigl(\frac{3x+|x|}{4}\Bigr) \leqslant \frac{\pi}{6} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3x+|x|}{4} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Déterminer les x dans X revient donc à trouver les x qui satisfont simultanément (1) et (2), c'est-à-dire les x qui satisfont :

$$-1 \leqslant \frac{3x+|x|}{4} \quad\text{et}\quad \frac{3x+|x|}{4} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Pour l'inéquation de gauche, distinguons deux cas selon le signe de x.

- Si $x < 0$, l'inéquation devient $-1 \leqslant \frac{1}{4}2x$, c'est-à-dire $x \geqslant -2$. Eu égard au fait qu'on travaille avec les $x < 0$, les solutions sont les nombres dans $[-2, 0[$.
- Si $x \geqslant 0$, l'inégalité est toujours vérifiée car $3x + |x| \geqslant 0 \geqslant -1$.

En conclusion, les solutions de cette première inéquation sont les réels de l'intervalle $[-2, +\infty[$.

On distingue les deux mêmes cas pour la seconde inéquation.

- Si $x < 0$, celle-ci devient $2x/4 \leqslant 1/2$ ce qui est toujours vrai puisque $x < 0$.
- Si $x \geqslant 0$, elle devient $x \leqslant 1/2$ ce qui donne l'ensemble $[0, 1/2]$ comme solutions pour ce cas.

Au final, les solutions de cette seconde inéquation sont les réels de $]-\infty, 1/2]$.

Comme $x \in X$ si et seulement si x satisfait les deux inéquations de (3), on a que $X = [-2, +\infty[\cap\,]-\infty, 1/2] = [-2, 1/2]$.

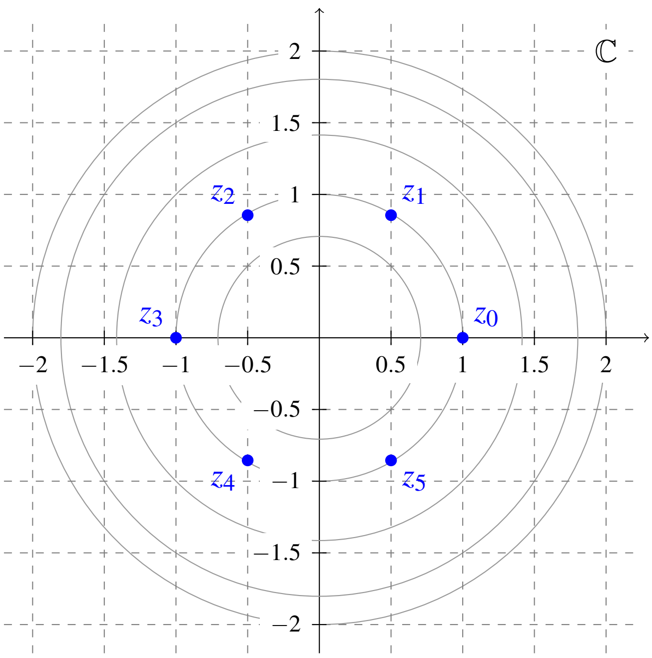
Question 4. *Soit la fonction $f(z) = \mathrm{e}^{az^2+a^2z}$ où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Calculez $\partial_z f(-a)$. Justifiez les différentes étapes de votre calcul.*

Calculons tout d'abord $\partial_z f$. En utilisant les formules de dérivées pour la composition de fonctions, nous obtenons
$$\partial_z f(z) = \mathrm{e}^{az^2+a^2z}\,\partial_z\big(az^2+a^2z\big) = \big(2az+a^2\big)\,\mathrm{e}^{az^2+a^2z}.$$
Évalué en $z=-a$, nous obtenons
$$\partial_z f(-a) = \big(2a(-a)+a^2\big)\,\mathrm{e}^{a(-a)^2+a^2(-a)} = -a^2 \qquad (\text{car } \mathrm{e}^0 = 1).$$

Question 5. *Donnez $z_n := \big(\frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^n$, pour $n \in \mathbb{N}$, sous forme trigonométrique et sous forme cartésienne (donnez des formules qui utilisent n modulo α pour un α bien choisi). Placez les points z_n dans le plan complexe.*

Sous forme trigonométrique, nous avons $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} = \operatorname{cis}\frac{5\pi}{3}$, c'est-à-dire également $\operatorname{cis}\big(\frac{-\pi}{3}\big)$. Par la formule de De Moivre, on obtient que
$$\Big(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\Big)^n = \Big(\operatorname{cis}\big(-\frac{\pi}{3}\big)\Big)^n = \operatorname{cis}\Big(-\frac{n\pi}{3}\Big).$$
Ceci permet de placer les points $z_0 = 1$, z_1, $z_2, \dots, z_5$ sur le cercle unité et de voir que $z_6 = \operatorname{cis}\big(\frac{-6\pi}{3}\big) = 1$.

Pour la forme trigonométrique des z_n, on a, vu les calculs précédents, que $z_n = \operatorname{cis}\big(-\frac{n\pi}{3}\big)$, c'est-à-dire $z_n = \operatorname{cis}\big(\big(\frac{-n\pi}{3}\big) \bmod 2\pi\big)$, ou encore
$$\begin{aligned} z_n &= \operatorname{cis}\Big(\big(-n \bmod 6\big)\frac{\pi}{3}\Big) \\ &= \operatorname{cis}\Big(\big((5n) \bmod 6\big)\frac{\pi}{3}\Big). \end{aligned}$$



Il y a donc six valeurs distinctes pour les z_n qui correspondent aux six restes possibles, c'est-à-dire
$$\begin{aligned}
z_0 &= \operatorname{cis} 0 = 1 && \text{si } (5n) \bmod 6 = 0,\\
z_1 &= \operatorname{cis}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} && \text{si } (5n) \bmod 6 = 1,\\
z_2 &= \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} && \text{si } (5n) \bmod 6 = 2,\\
z_3 &= \operatorname{cis}\frac{3\pi}{3} = -1 && \text{si } (5n) \bmod 6 = 3,\\
z_4 &= \operatorname{cis}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} && \text{si } (5n) \bmod 6 = 4,\\
z_5 &= \operatorname{cis}\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} && \text{si } (5n) \bmod 6 = 5.
\end{aligned}$$

Question 6.

(a) Écrivez explicitement la matrice $M \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ définie par

$$M_{ij} = \begin{cases} 42 & \text{si } |i-j| \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calculez, si possible, AB, C^tB et AD.

(a) $M = \begin{pmatrix} 42 & 42 & 0 & 0 & 0 \\ 42 & 42 & 42 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 42 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 42 & 42 & 42 \\ 0 & 0 & 0 & 42 & 42 \end{pmatrix}$

(b) Pour $A \cdot B$, le produit est bien défini car A est une matrice 1×3 et B est une matrice 3×1. Nous obtenons $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3) = 14$.

Comme C est une matrice 3×2, C^t est une matrice 2×3. Dès lors, $C^t \cdot B$ est bien défini.

$$C^t \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \end{pmatrix}$$

La matrice A est une matrice 1×3 et la matrice D est une matrice 2×2. Dès lors, le produit $A \cdot D$ est impossible car le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de D.

Question 7. *Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et z_0 une solution complexe de l'équation $Z^n = a + b\boldsymbol{i}$ avec $a + b\boldsymbol{i} \neq 0$. Prouvez que l'inverse de z_0 existe.*

Le complexe z_0 est solution de $z^n = a + b\boldsymbol{i}$ si et seulement si $z_0^n = a + b\boldsymbol{i}$. Donc, $z_0^n \neq 0$ ($n > 0$), c'est-à-dire $|z_0^n| = |z_0|^n \neq 0$. Par conséquent $|z_0| \neq 0$ et donc $z_0^{-1} = \frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2}$ existe.

Question 8. *Soient* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *et* z_0 *une solution complexe de l'équation*

$$Z^n = a + b\boldsymbol{i} \tag{4}$$

avec $a + b\boldsymbol{i} \neq 0$. *Soit* U_n *l'ensemble des solutions de l'équation*

$$Z^n = 1. \tag{5}$$

(a) *Prouvez que si* $u \in U_n$, *alors* $z_0 u$ *est solution de* (4).

(b) *Soit* z *une solution de* (4). *Prouvez que* $z_0^{-1} z$ *est une solution de* (5).

(c) *Déduisez de (a) et (b) que l'ensemble des solutions de* (4) *est égal à* $\{z_0 u \mid u^n = 1\}$.

(a) Il suffit de vérifier (par définition de « être solution ») que $(z_0 u)^n = a + b\boldsymbol{i}$. On a $(z_0 u)^n = z_0^n u^n$ car $\cdot_{\mathbb{C}}$ est commutative et associative. Par hypothèse, $z_0^n = a + b\boldsymbol{i}$ et $u^n = 1$, donc $(z_0 u)^n = a + b\boldsymbol{i}$.

(b) Par le même type de raisonnement qu'au point précédent, il suffit de vérifier que $(z_0^{-1} z)^n = 1$. Remarquons que z_0^{-1} existe puisque z_0 est solution de $z^n = a + b\boldsymbol{i}$ avec $a + b\boldsymbol{i} \neq 0$ (voir la question 7). On a $\left(z_0^{-1} z\right)^n = (z_0^{-1})^n z^n = (z_0^n)^{-1} z^n$. Par hypothèse, $z_0^n = z^n = a + b\boldsymbol{i}$. Donc, $(z_0^n)^{-1} z^n = (a + b\boldsymbol{i})^{-1}(a + b\boldsymbol{i}) = 1$.

(c) Posons $A = \{z \mid z \text{ est solution de l'équation (4)}\}$ et $B = \left\{z_0 u \;\middle|\; u^n = 1 \text{ et } z_0^n = a + b\boldsymbol{i}\right\}$.

Par le premier point, on a que $B \subseteq A$. Réciproquement, on voit que si z est solution de (4) alors $z = z_0(z_0^{-1} z)$ car $z_0(z_0^{-1} z) = (z_0 z_0^{-1}) z = z$ et $z_0^{-1} z \in U_n$ par le deuxième point. Donc z est bien de la forme $z_0 u$ avec $u \in U_n$, c'est-à-dire $z \in B$, ce qui prouve $A \subseteq B$. On peut donc conclure $A = B$.