Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 6 (21 octobre 2013) **Correction**

Question 1. *Calculez*

(a) $\displaystyle\sum_{i=3}^{n+3} 1 = \sum_{i=0}^{n+3} 1 - \sum_{i=0}^{2} = n+4-3 = n+1$

(b) $\displaystyle\sum_{i=3}^{n+3}(i+2) = \sum_{i=3}^{n+3} i + 2\Big(\sum_{i=3}^{n+3} 1\Big) = 2(n+1) + \sum_{i=0}^{n+3} i - \sum_{i=0}^{2} i = 2(n+1) + \frac{(n+3)(n+4)}{2} - 3$

Question 2. *Prouvez par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que* $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^3 = \Big(\sum_{i=0}^{n} i\Big)^2$.

Pour le <u>cas de base</u> $n=0$, on a $\sum_{i=0}^{n} i^3 = 0$ et $\big(\sum_{i=0}^{n} i\big)^2 = 0^2 = 0$, ce qui le prouve.
<u>Pas de récurrence</u> : supposons que l'égalité est vérifiée pour tout naturel n tel que $0 \leqslant n \leqslant k$ où $k \in \mathbb{N}$. Sous cette hypothèse de récurrence, prouvons l'égalité pour $n = k+1$, c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \Big(\sum_{i=0}^{k+1} i\Big)^2.$$

Le premier membre est égal à $\sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \big(\sum_{i=0}^{k} i^3\big) + (k+1)^3$ qui, par hypothèse de récurrence, est égal à

$$\Big(\sum_{i=0}^{k} i\Big)^2 + (k+1)^3 = \Big(\sum_{i=0}^{k} i\Big)^2 + k^3 + 3k^2 + 3k + 1.$$

Le second membre est égal à

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{i=0}^{k+1} i\Big)^2 &= \Big(\big(\sum_{i=0}^{k} i\big) + (k+1)\Big)^2 \\
&= \big(\sum_{i=0}^{k} i\big)^2 + (k+1)^2 + 2(k+1)\big(\sum_{i=0}^{k} i\big) \\
&= \big(\sum_{i=0}^{k} i\big)^2 + k^2 + 1 + 2k + \frac{2(k+1)(k+1)k}{2} \\
&= \big(\sum_{i=0}^{k} i\big)^2 + k^2 + 1 + 2k + k^3 + 2k^2 + k \\
&= \big(\sum_{i=0}^{k} i\big)^2 + k^3 + 3k^2 + 3k + 1,
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'égalité.

Question 3. *Écrivez l'ensemble* $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \arcsin(x) \geqslant -\pi/3\}$ *ci-après sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est). Justifiez les différentes étapes de votre raisonnement.*

Les conditions d'existence nous imposent $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Comme sin et son inverse arcsin sont des fonctions strictement croissantes et que $-\pi/3 \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a

$$\arcsin(x) \geqslant -\pi/3 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant \sin(-\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dès lors $A = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$.

Question 4. *Résolvez le système suivant en fonction du paramètre* $\lambda \in \mathbb{R}$ *:*

$$\begin{cases} x + \lambda y = \lambda \\ \lambda x - y = 0 \\ \lambda x + \lambda y = 1 \end{cases}$$

Considérons la matrice augmentée du système et échelonnons la. On a :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & -1 & 0 \\ \lambda & \lambda & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & -1-\lambda^2 & -\lambda^2 \\ 0 & \lambda-\lambda^2 & 1-\lambda^2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \lambda L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda^2/(1+\lambda^2) \\ 0 & \lambda-\lambda^2 & 1-\lambda^2 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow L_2/(-1-\lambda^2)$$

où cette dernière transformation est permise car on a $-1-\lambda^2 = -(1+\lambda^2) \neq 0$. Notons M cette dernière matrice.

- Si $\lambda - \lambda^2 \neq 0$, c'est-à-dire si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$, alors on a :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 1 & \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \\ 0 & 1 & \frac{\lambda+1}{\lambda} \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow \frac{L_3}{\lambda(1-\lambda)}.$$

  La deuxième ligne correspond à l'équation $y = \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}$. La troisième ligne correspond à l'équation $y = \frac{\lambda+1}{\lambda}$. Ces deux équations sont compatibles si $\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} = \frac{\lambda+1}{\lambda}$, c'est-à-dire si $\lambda^3 = \lambda + 1 + \lambda^3 + \lambda^2$, c'est-à-dire si $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$. Or, on a $\lambda^2 + \lambda + 1 \neq 0$ quel que soit λ puisque le discriminant vaut -3. Le système est donc impossible. L'ensemble des solutions est $\varnothing$.

- Si $\lambda = 0$, la matrice M devient $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. La troisième ligne nous dit que $0 = 1$. Le système est donc impossible. L'ensemble des solutions est $\varnothing$.
- Si $\lambda = 1$, la matrice M devient $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. La deuxième ligne correspond à l'équation $y = \frac{1}{2}$.

  La première ligne correspond à l'équation $x + y = 1$. Donc, $x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. L'ensemble des solutions est le singleton $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

Question 5. *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{tg}\bigl(x\,\mathrm{e}^{-x^2}\bigr)$. Déterminez toutes les abscisses $a \in \operatorname{Dom} f$ telles que la tangente au graphe de f en $\bigl(a, f(a)\bigr)$ soit perpendiculaire à la droite D d'équation $x = 1$.*

Commençons par remarquer qu'une droite $D' \equiv \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ est perpendiculaire à D si et seulement si leurs vecteurs normaux sont perpendiculaires, c'est-à-dire si et seulement si $\bigl((\alpha, \beta) \mid (1, 0)\bigr) = 0$, i.e., $\alpha = 0$ (et donc $\beta \neq 0$). Cela signifie que $D' \equiv y = \gamma/\beta$, c'est-à-dire que la pente de D' est nulle.
Donc la tangente au graphe de f au point $\bigl(a, f(a)\bigr)$ sera perpendiculaire à D si et seulement si sa pente est nulle. Or la pente de la tangente est donnée par $\partial f(a)$. La question revient donc à chercher toutes les abscisses a telles que $\partial_x f(a) = 0$. La dérivée de f est donnée par $\partial_x f(x) = \bigl(1 + \operatorname{tg}^2(x\,\mathrm{e}^{-x^2})\bigr)\bigl(\mathrm{e}^{-x^2} - 2x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}\bigr) = \bigl(1 + \operatorname{tg}^2(x\,\mathrm{e}^{-x^2})\bigr)\,\mathrm{e}^{-x^2}(1 - 2x^2)$. Comme l'image d'une fonction exponentielle est toujours positive et que $\bigl(1 + \operatorname{tg}^2(x\,\mathrm{e}^{-x^2})\bigr) > 0$ quel que soit x, nous obtenons que $\partial_x f(a) = 0$ si et seulement si $1 - 2a^2 = 0$, c'est-à-dire $a = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Comme[1] $\pm\sqrt{\frac{1}{2}} \in \operatorname{Dom} f$, les abscisses recherchées sont $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$ et $a = -\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Question 6.

(a) Prouvez que $(2 - \boldsymbol{i})^4 = -7 - 24\boldsymbol{i}$.

(b) Donnez sous forme cartésienne les solutions dans $\mathbb{C}$ de $Z^4 = -7 - 24\boldsymbol{i}$.

- $(2 - \boldsymbol{i})^4 = \bigl((2 - \boldsymbol{i})^2\bigr)^2 = (3 - 4\boldsymbol{i})^2 = -7 - 24\boldsymbol{i}$
- Le point précédent prouve que $2 - \boldsymbol{i}$ est solution de $Z^4 = -7 - 24\boldsymbol{i}$ (*). Par conséquent, par la méthode vue au cours, les solutions de (*) sont $(2 - \boldsymbol{i}) \cdot u$ avec u solution de $Z^4 = 1$, c'est-à-dire $2 - \boldsymbol{i}$, $(2 - \boldsymbol{i})\boldsymbol{i}$, $-(2 - \boldsymbol{i})$ et $(2 - \boldsymbol{i})(-\boldsymbol{i})$ ou encore $2 - \boldsymbol{i}$, $1 + 2\boldsymbol{i}$, $-2 + \boldsymbol{i}$ et $-1 - 2\boldsymbol{i}$.

[1] L'appartenance de $\pm\sqrt{1/2}$ au domaine de la fonction f, i.e., le fait que $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-1/2} \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ne doit pas être établi rigoureusement dans le cadre de ce cours.

Question 7. *Montrez qu'il existe un seul polynôme p de degré* 3 *de la forme* $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ *vérifiant* $p(1) = -1$, $p(2) = -3$ *et* $p(3) = 9$. *Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

On sait que $p(1) = -1$. Donc, en remplaçant x par -1, nous avons $-1 = a+b+c+1$, c'est-à-dire

$$a+b+c = -2. \tag{1}$$

De la même manière, nous avons $p(2) = -3$, c'est-à-dire $-3 = 8a+4b+2c+1$ ou encore

$$4a+2b+c = -2, \tag{2}$$

et $p(3) = 9$, c'est-à-dire $9 = 27a+9b+3c+1$, ce qui revient à

$$27a+9b+3c = 8. \tag{3}$$

Montrer qu'il existe un seul polynôme qui satisfait les conditions données revient à prouver que le système formé par (1), (2) et (3) possède une unique solution. Considérons donc le système

$$\begin{cases} a+b+c = -2 \\ 4a+2b+c = -2 \\ 27a+9b+3c = 8 \end{cases}$$

et échelonnons sa matrice augmentée. On a :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 27 & 9 & 3 & 8 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & -18 & -24 & 62 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 27L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -3 \\ 0 & 9 & 12 & -31 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2/(-2) \\ L_3 \leftarrow L_3/(-2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -3 \\ 0 & 0 & -3/2 & -4 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8/3 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow \frac{-2}{3} L_3$$

La troisième ligne nous dit que $c = 8/3$. La deuxième ligne dit que $b + \frac{3}{2}c = -3$. Donc, $b = -3 - \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} = -3 - \frac{8}{2} = -7$.

La première ligne dit que $a+b+c = -2$. Donc $a = -2+7-\frac{8}{3} = \frac{7}{3}$. Le système a bien une unique solution, à savoir $\left(\frac{7}{3}, -7, \frac{8}{3}\right)$. Par conséquent, $p(x) = \frac{7}{3}x^3 - 7x^2 + \frac{8}{3}x + 1$ est l'unique polynôme qui satisfait les conditions données.