Mathématique Élémentaire

Examen (27 octobre 2014)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez $/4$

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+x^2}\,\mathrm{d}x =$

- $\displaystyle\int_0^1 x \ln x^2\,\mathrm{d}x =$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Soient les matrices

/3

$$A \in \mathbb{R}^{4\times 4} \text{ définie par } A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculez, si possible, $\det A$, $B^t \cdot C$, D^{-1}.

Mathématique Élémentaire

Examen (27 octobre 2014)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Calculez les sommes suivantes : /4

- $\sum_{i=-7}^{7} (i^2+3)$

- $\sum_{j=2}^{v} \ell$ avec $v \geqslant 2$;

- $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} (i-j+v)$ avec $n \geqslant 0$.

Question 4. Calculez /3

- $|1+2\mathbf{i}| =$

- $\left|(1-2\mathbf{i})^8\right| =$

- $(1-2\mathbf{i})^{-2} =$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Donnez une équation cartésienne du plan α perpendiculaire à la droite d'intersection des plans d'équation $2x-4y+z=-3$ et $6x+3y-2z=7$ et passant par le point $(4,-1,0)$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs. $/4$

Mathématique Élémentaire

Examen (27 octobre 2014)

Nom :

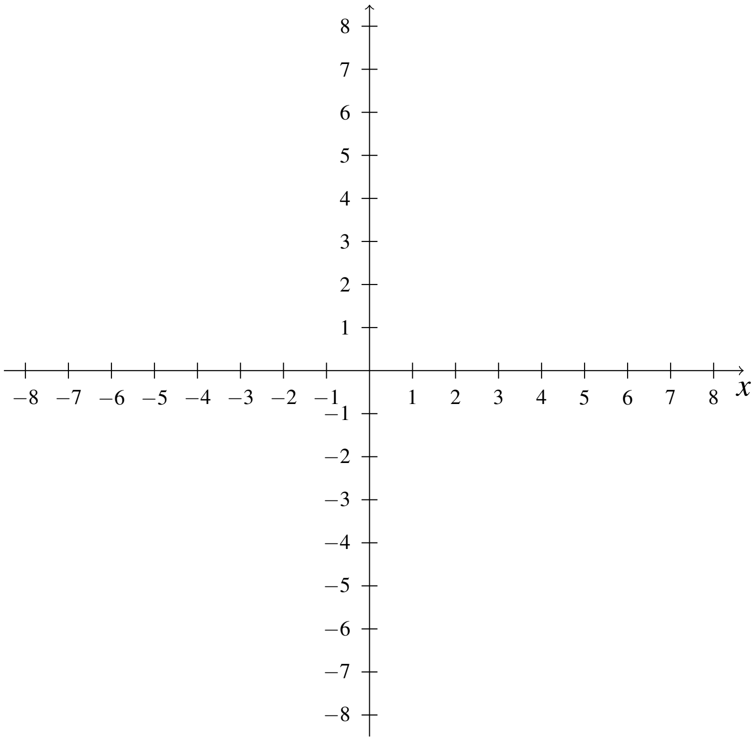
Prénom :

Section :

Question 6. Résolvez l'inéquation suivante /5

$$\frac{|x+6|}{x+3} \leqslant \sqrt{x+4} \tag{1}$$

c'est-à-dire, donnez l'ensemble des solutions sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est). Vérifiez la forme de votre réponse en esquissant un graphique ci-dessous. Expliquez votre démarche.



Nom :

Prénom :

Section :

Question 6 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 7. /4

(a) Soit la phrase « Si je gagne à la loterie, je ferai une croisière ». Donnez en bon français,

- la contraposée de cette phrase ;

- la négation de cette phrase.

(b) Donnez la table de vérité de $\big((P_1 \wedge P_2) \vee P_3\big) \Rightarrow \neg P_3$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. Soit le système

/10

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 1, \\ x + \lambda y - z = 1, \\ -x + y + \lambda z = 1, \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède-t-il une solution unique ?

(b) Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de A pour $\lambda = -3$.

(c) En utilisant le point (b), résolvez le système lorsque $\lambda = -3$. Expliquez votre démarche.

(d) Résolvez le système lorsque $\lambda = 0$ et lorsque $\lambda = 1$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

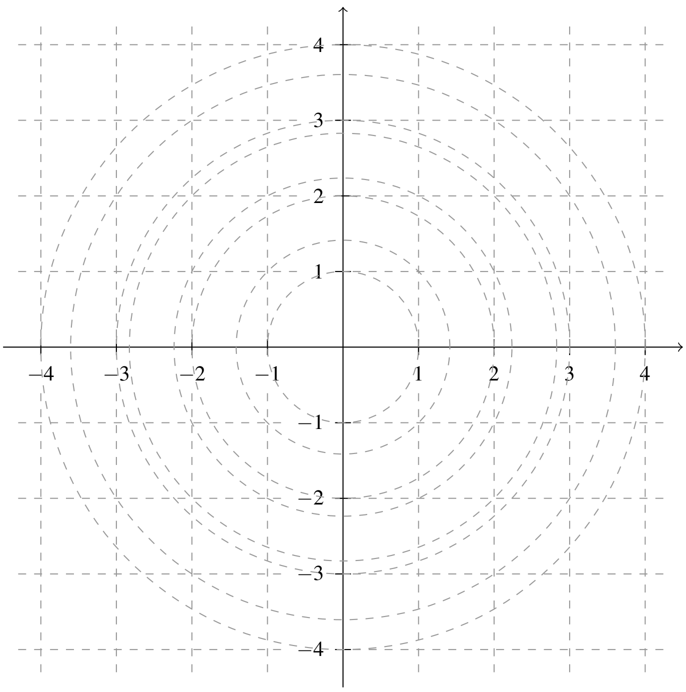
Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Donnez toutes les solutions complexes de l'équation $Z^4 = -4$ sous forme trigonométrique et sous forme $a + b\mathbf{i}$. Placez ces solutions sur le dessin ci-dessous.

/8



Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. On considère la fonction

/5

$$f_a :]0,+\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^a + \frac{\ln x^2}{a} + \operatorname{arctg} x$$

où a est un paramètre réel. Déterminez la ou les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ telle(s) que la tangente au graphe de f_a en $x = 1$ soit parallèle à la droite D_a d'équation paramétrique $(x,y) = (1,a^2) + \lambda(a,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Expliquez votre démarche.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 11. Soient les ensembles

/6

$$S_1 := \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid (\alpha,\beta) \text{ est un multiple non-nul du vecteur } (-1,2)\},$$
$$S_2 := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R}\},$$
$$S_3 := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1,x_2,x_3) \text{ est un vecteur normal du plan d'équation } x+y+z=4\}.$$

Décrivez géométriquement chaque ensemble et représentez les graphiquement. Expliquez votre démarche.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12. Prouvez par récurrence que, pour tout naturel $n \geqslant 0$, $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2$. /4