Mathématiques Élémentaires

Examen (7 janvier 2015)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit trois nombres entiers $j \geqslant 0$, $n \geqslant 4$ et $t \geqslant 0$. Calculez $/5$

- $\displaystyle\sum_{v=-3}^{j} v(v+2) =$

- $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} 4 =$

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{t}\sum_{\ell=0}^{t}(k^2-\ell^2+1) =$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Calculez, si possible,

/5

(a) $\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}^{-1} =$

(b) $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -d \\ 0 & 0 & d & c \end{pmatrix} =$

(c) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$

(d) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} =$

(e) $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} =$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3. /4

(a) Donnez la table de vérité de $A \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow (B \wedge \neg C)$.

(b) Donnez, en bon français, la négation et la contraposée de la proposition suivante : « si $\sqrt{2}$ est rationnel, alors $1+\sqrt{2}$ est rationnel ».

Question 4. Calculez /4

- $(3+\mathbf{i})-(17-27\mathbf{i}) =$
- $|1+2\mathbf{i}| =$
- $|(1+2\mathbf{i})^{14}| =$
- $\operatorname{Arg} 4 =$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Quel est l'ensemble des vecteurs (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux aux droites D_1 et D_2 définies par /5

$$D_1 \equiv 1 - x = \frac{y+2}{-3} = \frac{-z+2}{-1}$$
$$D_2 \equiv (x, y, z) = (3\lambda + 1, -\lambda - 2, 5 + \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Décrivez géométriquement l'ensemble obtenu.

Question 6. Calculez : /4

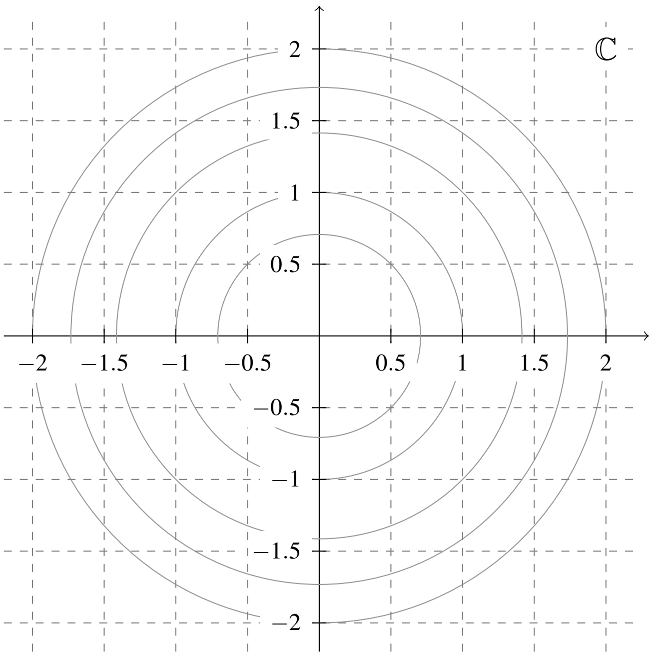
(a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x =$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x =$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 7. Résolvez l'équation suivante dans $\mathbb{C}$: $X^6 = -27$. Détaillez votre méthode. Donnez les solutions sous forme trigonométrique et algébrique. Représentez ces solutions dans le plan.

/8



Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. Écrivez l'ensemble suivant $A \subset \mathbb{R}$ sous la forme d'une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est) :

/6

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{3}{x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x+6}-2} \right\}$$

Veillez à justifier les différentes étapes de vos calculs.

Nom :
Prénom :
Section :

/8

Question 9. Soit le système

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède-t-il une solution unique ?

(b) Soit $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de M pour $\lambda = 3$.

(c) En utilisant le point (b), résolvez le système lorsque $\lambda = 3$. Expliquez votre démarche.

(d) Résolvez le système en fonction de λ uniquement dans le(s) cas où le déterminant de la matrice des coefficients est nul.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Mathématiques Élémentaires

Examen (7 janvier 2015)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10.

/6

(a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Prouvez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1-z)\sum_{k=0}^{n} z^k = 1 - z^{n+1}$.

(b) Montrez que $\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11. On considère la fonction

/5

$$f_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^a + \frac{\ln x^2}{a} + \operatorname{arctg} x$$

où a est un paramètre réel. Déterminez la ou les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ telle(s) que la tangente au graphe de f_a en $x = 1$ soit parallèle à la droite D_a d'équation paramétrique $(x, y) = (1, a^2) + \lambda(a, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Expliquez votre démarche.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 12. Soient les ensembles

/6

$$S_1 := \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (\alpha,\beta) \text{ est un vecteur normal à la droite d'équation } y = x+5\right\},$$
$$S_2 := \left\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x,z \in \mathbb{R}\right\},$$
$$S_3 := \left\{(x_1,x_2,0) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1,x_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Décrivez géometriquement chaque ensemble et représentez les graphiquement. Expliquez votre démarche.