Mathématiques Élémentaires

Examen (27 mai 2015)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez /2

- $|-1-2\mathbf{i}| =$
- $\dfrac{5-2\mathbf{i}}{3-4\mathbf{i}} =$
- $|\mathbf{i}-3| =$
- $\overline{-7\mathbf{i}+5} =$
- $\left|(1+2\mathbf{i})^7(\mathbf{i}-3)^4\right|^2 =$

Question 2. Donnez en bon français la négation de « Si je vais en vacances, alors j'apprends l'anglais ». Justifiez votre réponse. /2

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3. Calculez (en simplifiant le résultat autant que possible) : /5

- $\sum_{v=-3}^{\ell} \frac{v(v+1)}{2} =$

- $\sum_{k=1}^{t} \sum_{\ell=0}^{t} (k^2 - \ell^2 + 1) =$

Question 4. La proposition suivante est-elle une tautologie ? /3

$$\big(P \Rightarrow (\neg Q \vee R)\big) \Leftrightarrow \big((P \wedge Q) \Rightarrow R\big)$$

Justifiez votre réponse.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Prouver par récurrence sur k que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, /4

$$\partial_x^k \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \tag{1}$$

où, pour rappel, le symbole « ∂_x^k » signifie qu'on dérive l'expression k fois par rapport à x.

Question 6. Calculez : /4

(a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x =$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x =$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. On considère la fonction

/5

$$f_a :]0,+\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^a + \frac{\ln x^2}{a} + \operatorname{arctg} x$$

où a est un paramètre réel. Déterminez la ou les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ telle(s) que la tangente au graphe de f_a en $x = 1$ soit parallèle à la droite D_a d'équation paramétrique $(x,y) = (1,a^2) + \lambda(a,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Expliquez votre démarche.

Nom :
Prénom :
Section :

/6

Question 8. Soient les ensembles

$$S_1 := \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid (\alpha,\beta) \text{ est un multiple non-nul du vecteur } (-1,2)\},$$
$$S_2 := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R}\},$$
$$S_3 := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1,x_2,x_3) \text{ est un vecteur normal du plan d'équation } x+y+z=4\}.$$

Décrivez géométriquement chaque ensemble et représentez les graphiquement. Expliquez votre démarche.

Nom :

Prénom :

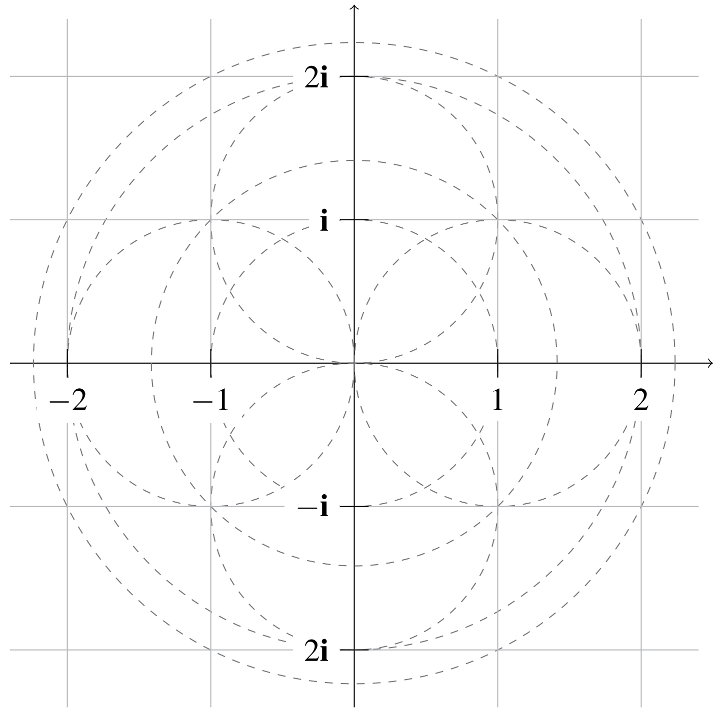
Section :

Question 9. Calculez, dans $\mathbb{C}$, sous forme trigonométrique et sous forme algébrique, les solutions de l'équation

$$X^3 + 1 = 0 \tag{2}$$

/4

Représentez ces solutions sur le graphe ci-dessous. Justifiez vos calculs.



Nom :
Prénom :
Section :

Question 9 (suite). Poursuivez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.

Question 10. Soient les matrices A et B définies par /3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta\gamma & \alpha\gamma & \alpha\beta \end{pmatrix}$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Calculez $\det A$ et $\det B$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11. Écrivez l'ensemble $A := \{x \in \mathbb{R} : |1 - \sqrt{x+2}| \leqslant 2\}$ comme une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est). $/4$

Nom :

Prénom :

Section :

/4

Question 12. Donnez une équation cartésienne du plan α perpendiculaire au plan β d'équation $x - 2y + 5z = 3$ et contenant la droite D passant par le point $(2,1,1)$ et dont un vecteur directeur est $(-1,2,1)$.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

/7

Question 13. Soit le système

$$\begin{cases} (m+1)x+my+mz=m \\ x+my+z=2m \\ x+y+mz=0 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de m le système possède-t-il une solution unique ?

(b) Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de A pour $m=-5$.

(c) En utilisant le point (b), donnez l'ensemble des solutions du système lorsque $m=-5$.

(d) Résolvez le système en fonction de m uniquement dans le cas où le déterminant de la matrice des coefficients est nul.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 13 (suite). Poursuivez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.