

Mathématiques Élémentaires

Examen

(20 août 2015)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Veillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez les intégrales suivantes :

■ $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx =$

■ $\int_0^1 \frac{1}{2+x^2} dx =$

/4

Question 2. On considère la fonction

$$f_a :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^a + \frac{\ln x^3}{a} + \sqrt{x}$$

où $a \in \mathbb{R}$. Déterminez la ou les valeurs de a telle(s) que la tangente au graphe de f_a en $x = 1$ soit parallèle à la droite $D_a \equiv (x, y) = (1, a^2) + \lambda(a, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. La qualité de vos explications est importante.

/5

Question 3. Soient les matrices

/3

$$A \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \text{ définie par } A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculez, si possible, $\det A$, $B^t \cdot C$, D^{-1} .

Question 4. Prouvez par récurrence que $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} x^n & \partial_x(x^n) \\ 0 & x^n \end{pmatrix}$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

/ 3

Question 5. Calculer

■ $\overline{2 - \mathbf{i}}$ =

■ $\overline{3\mathbf{i} - 5}$ =

■ $|(1 - \mathbf{i})^{10}|$ =

■ $|(2 - \mathbf{i})(\overline{3\mathbf{i} - 5})|$ =

/ 4

Question 6. Calculez les sommes suivantes :

■ $\sum_{k=0}^n i^2 =$

■ $\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n ((k^2 - \ell^2) + 2\ell) =$

■ $\sum_{k=-7}^{14} 2 =$

Question 7.

(a) Prouvez que $(\neg(p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$ est une tautologie.

(b) Donnez la négation de la phrase suivante : « Si le professeur explique bien, alors les élèves réussiront l'examen ». Expliquez votre démarche.

/4

/3

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 8. Donnez une équation cartésienne du plan α perpendiculaire au plan β d'équation $x - 2y + 5z = 3$ et contenant la droite D passant par le point $(2, 1, 1)$ et dont un vecteur directeur est $(-1, 2, 1)$.

/4

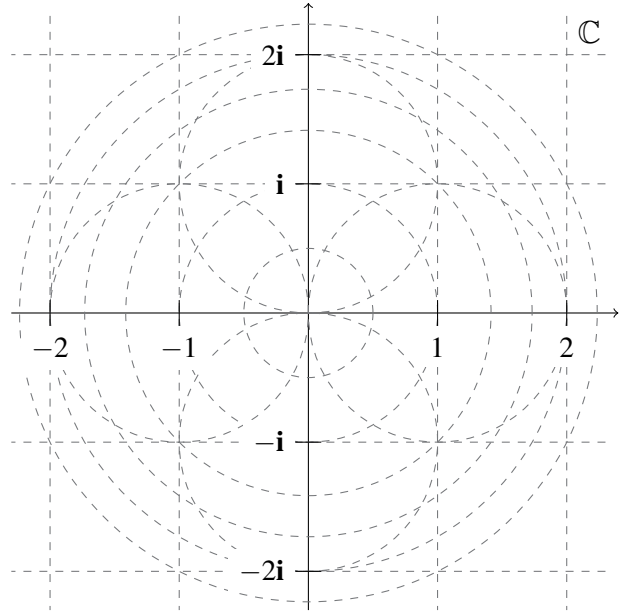
Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

/7

Question 9. Dans le corps des complexes, résolvez l'équation suivante de manière algébrique et graphique.

$$X^6 + 27 = 0$$

Veillez à la qualité de vos explications.



Question 10. Écrivez l'ensemble

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{|x| - 1} - |x| + 2 > 0 \right\}$$

sous la forme d'une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est).

/4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

/7

Question 11. Soit le système

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = 0 \\ \lambda x + (\lambda + 1)y + \lambda z = \lambda \\ \lambda x + y + z = 2\lambda \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

- (a) Dites pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède une solution unique.
- (b) Résolvez le système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Mathématiques Élémentaires

Examen

(20 août 2015)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 11 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 12.

/4

- (a) Recherchez l'ensemble A des vecteurs $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux au vecteur $(1, -1, 2)$. Décrivez géométriquement l'ensemble A .
- (b) Recherchez l'ensemble B des vecteurs $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ qui sont simultanément orthogonaux aux vecteurs $(1, -1, 2)$ et $(-2, 1, 4)$. Décrivez géométriquement l'ensemble B .