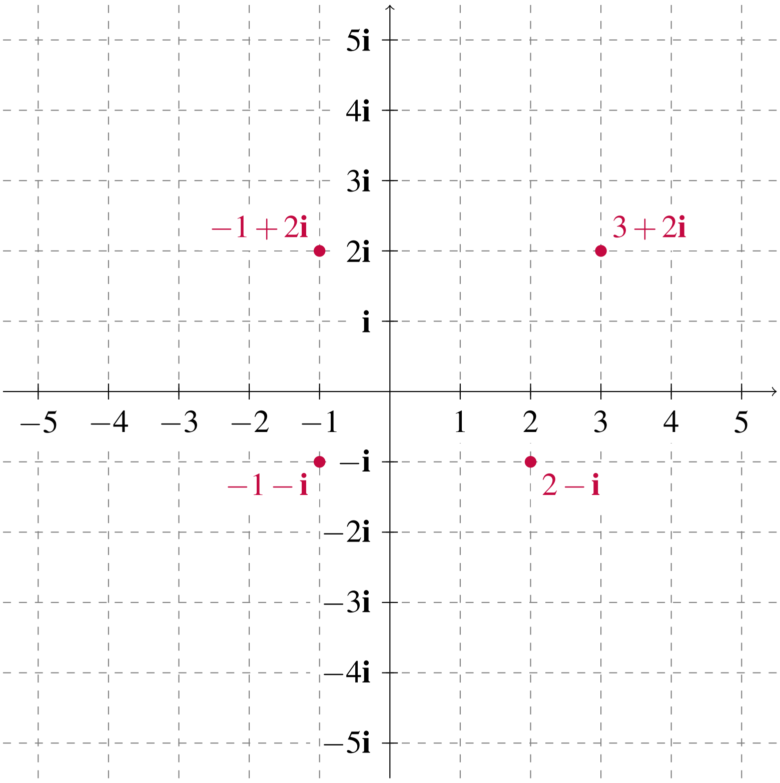
Mathématique Élémentaire

Test n° 2 (22 septembre 2014)

Correction

Question 1. *Placer dans le plan les complexes suivants :* $2-\mathbf{i}$, $3+2\mathbf{i}$, $-1-\mathbf{i}$, $-1+2\mathbf{i}$ *où* $\mathbf{i}^2=-1$.



Question 2.

(a) *Soit* $z=4-3\mathbf{i}$. *Calculer*

- $\Re\mathrm{e}\, z=4$
- $\Im\mathrm{m}\, z=-3$
- $\bar{z}=4+3\mathbf{i}$
- $|z|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ car $|a+b\mathbf{i}|=\sqrt{a^2+b^2}$.

(b) *Calculer*

- $(4-3\mathbf{i})(2-\mathbf{i})=8+3\mathbf{i}^2-4\mathbf{i}-6\mathbf{i}=5-10\mathbf{i}$
- $(4-3\mathbf{i})+(2-\mathbf{i})=6-4\mathbf{i}$
- $(4-3\mathbf{i})-(2-\mathbf{i})=2-2\mathbf{i}$
- $|4-3\mathbf{i}|=5$ (voir $|z|$ au point (a)).
- $|2+\mathbf{i}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$
- $|(4-3\mathbf{i})(2+\mathbf{i})|=|4-3\mathbf{i}|\,|2+\mathbf{i}|=5\sqrt{5}$ où la première égalité vient du fait que le module d'un produit est le produit des modules.

Question 3. *Prouver que* $2+\mathbf{i}$ *est solution de l'équation* $X^2-(1-\mathbf{i})X-5\mathbf{i}=0$.

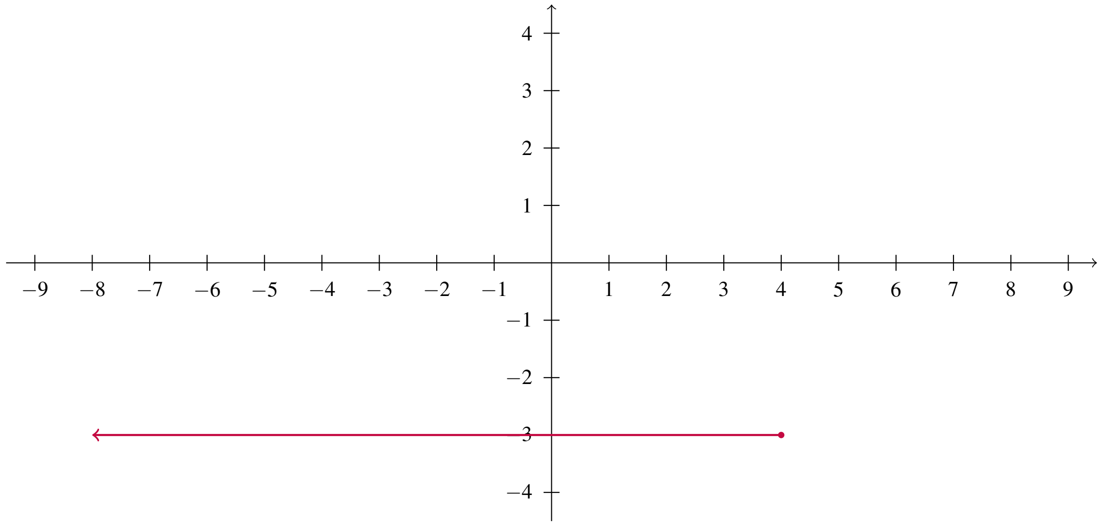
Par définition de « être solution », le nombre $2+\mathbf{i}$ est solution de l'équation $X^2-(1-\mathbf{i})X-5\mathbf{i}=0$ ssi $(2+\mathbf{i})^2-(1-\mathbf{i})(2+\mathbf{i})-5\mathbf{i}=0$. Calculons le premier membre :

$$\begin{aligned}(2+\mathbf{i})^2-(1-\mathbf{i})(2+\mathbf{i})-5\mathbf{i} &= 3+4\mathbf{i}-(2-\mathbf{i}^2+\mathbf{i}-2\mathbf{i})-5\mathbf{i}\\ &= 3+4\mathbf{i}-(3-\mathbf{i})-5\mathbf{i}\\ &= 0\end{aligned}$$

Question 4.

(a) *Donnez les composantes du vecteur* x *dont l'origine est le point* $(4,-3)$ *et l'extrémité est le point* $(-8,-3)$. *Expliquez votre démarche.*

Les composantes du vecteur x sont $(-8,-3)-(4,-3)=\big(-8-4,-3-(-3)\big)=(-12,0)$.



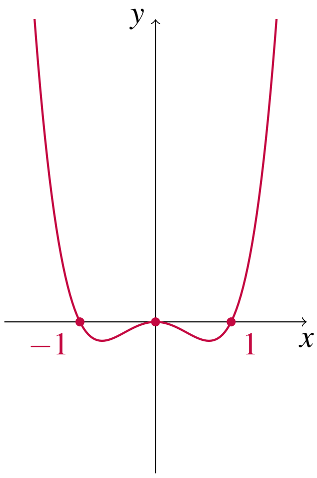
(b) *Soient les vecteurs* $u=(-1,5,2,8)$ *et* $v=(3,0,-4,-1)$. *Calculez*

- $(u|2v)=\big((-1,5,2,8)\;\big|\;(6,0,-8,-2)\big)=-1\cdot 6+5\cdot 0+2\cdot(-8)+8\cdot(-2)=-38$
- $\|u-v\|=\|(-1,5,2,8)-(3,0,-4,-1)\|=\|(-4,5,6,9)\|=\sqrt{(-4)^2+5^2+6^2+9^2}=\sqrt{16+25+36+81}=\sqrt{158}.$

Question 5. *Calculez la mesure principale des angles 31θ et -9θ pour $\theta = \frac{8}{15}\pi$.*

- $31\theta = 31(\frac{8}{15}\pi) = \frac{248}{15}\pi \notin [0, 2\pi[$.
  La mesure principale de $\frac{248}{15}\pi$ est $\frac{248}{15}\pi - 8 \cdot \frac{30}{15}\pi = \frac{8}{15}\pi \in [0, 2\pi[$.
- $-9\theta = -9\frac{8}{15}\pi = \frac{-72}{15}\pi \notin [0, 2\pi[$.
  La mesure principale de $\frac{-72}{15}\pi$ est $\frac{-72}{15}\pi + 3 \cdot \frac{30}{15}\pi = \frac{18}{15}\pi = \frac{6}{5}\pi \in [0, 2\pi[$.

Question 6. *Esquissez ci-dessous le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - x^2$. Expliquez comment vous avez procédé en mettant en évidence les caractéristiques importantes de la fonction.*



- On remarque que $f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 = x^4 - x^2 = f(x)$. La fonction f est donc paire et son graphe est symétrique par rapport à l'axe y.
- Lorsque $|x|$ est grand (que x soit positif ou négatif), x^4 est beaucoup plus grand que x^2 si bien que $f(x) \approx x^4$.
- Lorsque $x \approx 0$, x^4 est beaucoup plus petit que x^2 si bien que $f(x) \approx -x^2$.
- Les racines de f sont les x tels que $f(x) = 0$, c'est-à-dire les x tels que $x^2(x^2 - 1) = 0$, ou encore $x = 0$ (pour annuler x^2) ou $x = -1$ ou $x = 1$ (pour annuler $x^2 - 1$).

Ces considérations mènent au graphe ci-contre.

Question 7.

(a) *Soit $x \in \mathbb{R}$. Définissez $|x|$.*

(b) *À partir de la définition précédente, montrez que $|xy| = |x|\,|y|$ quels que soient les $x, y \in \mathbb{R}$.*

(a) $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$

(b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ (arbitraires). Pour retirer les valeurs absolues, on va considérer quatre cas.
- Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, on a $|x| = x$ et $|y| = y$. Dans ce cas, $xy \geqslant 0$ et donc $|xy| = xy = |x||y|$.
- Si $x < 0$ et $y \geqslant 0$, on a $|x| = -x$ et $|y| = y$. Puisqu'alors $xy \leqslant 0$, on a[1] $|xy| = -xy = |x||y|$.
- Si $x \geqslant 0$ et $y < 0$, on a $|x| = x$ et $|y| = -y$. Dès lors $xy \leqslant 0$ et donc[1] $|xy| = -xy = x \cdot (-y) = |x||y|$.

[1]Notons que si $z \leqslant 0$, $|z| = -z$. Cela découle de la définition si $z < 0$. Pour $z = 0$, on a $|z| = |0| = 0$ par la première partie de la définition et, dès lors, on a aussi que $|0| = -0$.

- Si $x < 0$ et $y < 0$, on a $|x| = -x$ et $|y| = -y$. Dans ce cas, $xy \geqslant 0$ et donc $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$.

Dans tous les cas, on a bien montré l'égalité demandée.

Question 8. *Résolvez l'équation $X^2 - 3X + 4 = 0$ dans $\mathbb{C}$. Expliquez clairement votre démarche.*

- Calculons le discriminant de l'équation : $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 - 16 = -7$.
- Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation auxiliaire $\Delta^2 = -7$. Ses solutions sont $\lambda_1 = \sqrt{7} \cdot \mathbf{i}$ et $\lambda_2 = -\sqrt{7} \cdot \mathbf{i}$ (car $-7 = 7(-1) = 7\mathbf{i}^2$).
- La formule classique nous fournit les solutions de l'équation de départ :

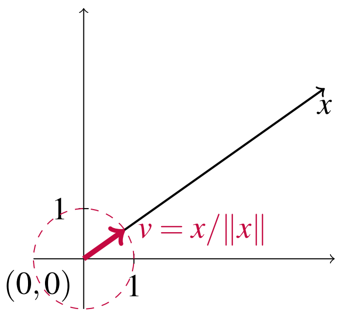
$$x_1 = \frac{-(-3) + \lambda_1}{2} = \frac{3 + \sqrt{7}\mathbf{i}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-3) + \lambda_2}{2} = \frac{3 - \sqrt{7}\mathbf{i}}{2}.$$

Question 9.

(a) *Soient $u \in \mathbb{R}^N$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrez que $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$. Détaillez votre raisonnement et citez les propriétés que vous utilisez.*

(b) *Calculez $\|u\|$ si on suppose maintenant que $u \in \mathbb{R}$.*

(c) *Soit $x \in \mathbb{R}^2$ le vecteur représenté ci-dessous. Sur ce même graphique, construisez de façon géométrique le vecteur $v = x/\|x\|$. Expliquez votre démarche.*



(a) Posons $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ où $u_1, u_2, \dots, u_N \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\|\lambda u\| &= \|\lambda(u_1, u_2, \dots, u_N)\| && \text{en remplaçant } u \\
&= \|(\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_N)\| && \text{par définition de la multiplication d'un vecteur par un réel} \\
&= \sqrt{(\lambda u_1)^2 + (\lambda u_2)^2 + \cdots + (\lambda u_N)^2} && \text{par définition de la norme} \\
&= \sqrt{\lambda^2 u_1^2 + \lambda^2 u_2^2 + \cdots + \lambda^2 u_N^2} && \text{car } \forall a, b \in \mathbb{R},\ (ab)^2 = a^2 \cdot b^2 \\
&= \sqrt{\lambda^2 (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_N^2)} && \text{par mise en évidence de } \lambda^2 \\
&= \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_N^2} && \text{car } \forall a, b \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \\
&= |\lambda| \cdot \|u\| && \text{par définition de la norme}
\end{aligned}$$

(b) Supposons que $u \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sqrt{u^2} \text{ par définition de la norme} \\ &= |u|. \end{aligned}$$

(c) Voir correction du test 2, 23 septembre 2013, Q3.