Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (29 septembre 2014) **Correction**

Question 1. *Calculez la forme trigonométrique de*

- $1+\mathbf{i} = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$
- $(1+\mathbf{i})^2 = 2\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{4}\right) = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$
- $(1+\mathbf{i})^8 = 16\operatorname{cis}\left(\frac{8\pi}{4}\right) = 16\operatorname{cis}(2\pi) = 16\operatorname{cis}(0)$
- $(1+\mathbf{i})^{34} = (1+\mathbf{i})^{32}\cdot(1+\mathbf{i})^2 = ((1+\mathbf{i})^8)^4\cdot(1+\mathbf{i})^2 = 16^4\cdot 2\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{4}\right) = 2^{17}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$
- $\operatorname{cis}\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right) = \operatorname{cis}\left(\dfrac{6\pi}{3}-\dfrac{5\pi}{3}\right) = \operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Question 2.

(a) *Donnez une équation cartésienne de la droite D_1 passant par $(42,\pi)$ et parallèle à la droite $D \equiv (x,y) = (0,3\lambda)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(b) *Donnez une équation paramétrique de la droite D_2 passant par $(-3,2)$ et perpendiculaire à la droite D' passant par $(-1,1)$ et $(4,9)$.*

(a) On a $D \equiv (x,y) = \lambda(0,3)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $(0,3)$ est un vecteur directeur de D et par conséquent de D_1 aussi puisque les droites D et D_1 sont parallèles. Vu que la première composante de ce vecteur est nulle on en déduit que D_1 est parallèle à l'axe des y. Son équation cartésienne est donc de la forme $x = c$ où $c \in \mathbb{R}$. Comme $(42,\pi) \in D_1$, on trouve $c = 42$. Donc $D_1 \equiv x = 42$.

(b) La pente de D' vaut $\frac{9-1}{4-(-1)} = \frac{8}{5}$. Donc la pente de D_2 vaut $\frac{-5}{8}$ car le produit des pentes de deux droites perpendiculaires vaut -1 (voir question 6). Par conséquent, le vecteur $(1,\frac{-5}{8})$ est un vecteur directeur de D_2. Donc $D_2 \equiv (x,y) = (-3,2)+\lambda(1,\frac{-5}{8})$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Question 3. *Calculez la forme algébrique (forme $a+b\mathbf{i}$) de*

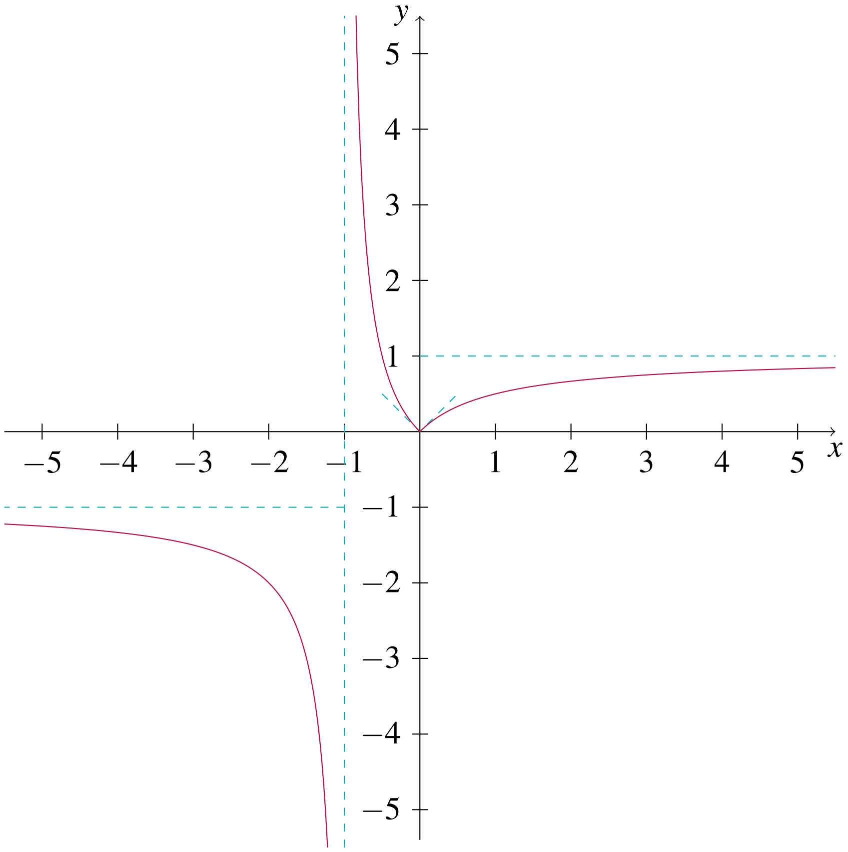
- $\operatorname{cis}\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)+\sin\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)\mathbf{i} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$
- $\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3} = \cos\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{\pi}{3}\mathbf{i} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$
- $\operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{3} = \cos\dfrac{2\pi}{3}+\sin\dfrac{2\pi}{3}\mathbf{i} = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$

Question 4. *Prouvez que, pour tout* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $z_1 = a + b\mathbf{i}$ et $z_2 = c + d\mathbf{i}$. On a
$z_1 \cdot z_2 = ac - bd + (ad + bc)\mathbf{i}$
$\overline{z_1 \cdot z_2} = ac - bd - (ad + bc)\mathbf{i}$
$\overline{z_1} = a - b\mathbf{i}$
$\overline{z_2} = c - d\mathbf{i}$
$\overline{z_2} \cdot \overline{z_2} = (a - b\mathbf{i})(c - d\mathbf{i}) = ac - (-b)(-d) + (a(-d) + (-b)c)\mathbf{i} = ac - bd - (ad + bc)\mathbf{i}$

On en déduit l'égalité souhaitée.

Question 5. *On considère la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{|x|}{x+1}$. *Esquissez le graphe de f ci-dessous en veillant à ce que ses caractéristiques importantes soient correctement représentées. Expliquez votre démarche.*



- Comme $f(-x) = \frac{|-x|}{-x+1} = \frac{|x|}{-x+1}$ n'est égal ni à $f(x)$ ni à $f(-x)$, la fonction f n'est ni paire, ni impaire.
- Les racines de f sont les x tels que $f(x) = 0$. Ici, ce sont les x tels que le numérateur $|x|$ s'annule, c'est à dire $x = 0$.
- Lorsque $x > 0$ est grand, $x + 1 \approx x$, si bien que $f(x) \approx \frac{|x|}{x} = 1$.
- Lorsque $x < 0$ est tel que $|x|$ est grand, $x + 1 \approx x$ et donc $f(x) \approx \frac{|x|}{x} = -1$.

- Lorsque $x \approx 0$, $x+1 \approx 1$ et donc $f(x) \approx |x|$.
- Lorsque $x \approx -1$, $x+1 \approx 0$ tandis que $|x| \approx 1$. Par conséquent, $f(x) \approx \frac{1}{x+1}$ qui est le graphe de $1/x$ translaté d'une unité vers la gauche. En particulier, si $x \approx -1$ et $x > -1$, alors on a $x+1 \gtrapprox 0$ et $f(x) > 0$ est très grand. Si $x \approx -1$ et $x < -1$, alors $f(x) < 0$ et $|f(x)|$ est très grand. On a donc une asymptote verticale en $x = -1$.

Ces caractéristiques donnent lieu au graphe ci-dessus.

Question 6. *Soient D et D' deux droites du plan d'équations respectives $D \equiv ax+by+c=0$ et $D' \equiv a'x+b'y+c'=0$.*

(a) *Donnez, en fonction de a, b et c, un vecteur normal et un vecteur directeur de D.*

(b) *Sous quelle(s) condition(s) sur a, b, c, la pente de D est-elle définie ? Que vaut alors cette pente ?*

(c) *Sous les conditions trouvées en (b), prouvez à l'aide de la notion de produit scalaire que les droites D et D' sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs pentes vaut -1. Expliquez votre raisonnement.*

Voir correction du test 4, 4 octobre 2010, question 4.

Question 7.

(a) *Résolvez $x-|x| < 1-|x-1|$. Plus précisément, écrivez l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x-|x| < 1-|x-1|\}$ sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est). Les différentes étapes de votre calcul doivent être détaillées et justifiées ci-dessous.*

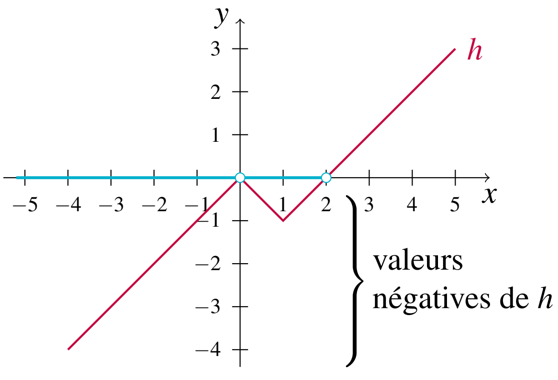
(b) *le graphe de la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x-|x|-1+|x-1|$ est donné ci-dessous. Comment pouvez-vous l'utiliser pour vérifier votre réponse ? Expliquez votre démarche.*

(a) Pour résoudre $x-|x| < 1-|x-1|$, distinguons trois cas.

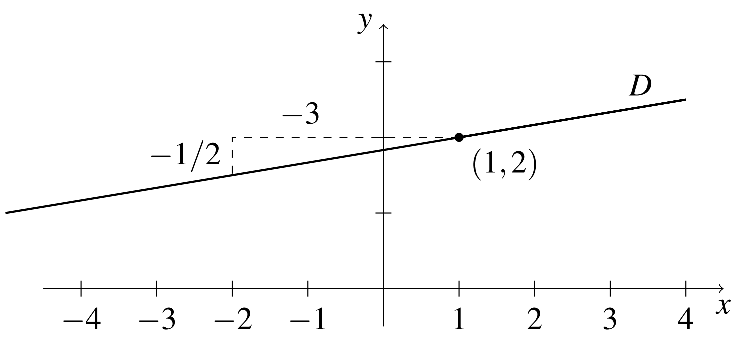
- Si $x < 0$, on a aussi $x-1 < 0$ et donc $|x| = -x$ et $|x-1| = -(x-1)$. L'inéquation se réduit donc à $x+x < 1+(x-1)$, c'est-à-dire $2x < x$ ou encore $x < 0$. Par conséquent, tous les $x < 0$ sont solutions de l'inégalité de départ.
- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $|x| = x$ et $|x-1| = -(x-1)$. L'inéquation devient $0 < 1+(x-1)$ ou encore $0 < x$. Vu les x avec lesquels on travaille, on en conclut que tous les $x \in]0,1]$ sont solutions de l'inéquation initiale.
- Si $x > 1$, on a $|x| = x$ et $|x-1| = x-1$. Dans ce cas, l'inéquation devient $0 < 1-(x-1)$, c'est-à-dire $0 < 2-x$, ou encore $x < 2$. En se rappelant qu'on ne considère ici que les $x > 1$, on trouve que les $x \in]1,2[$ sont solutions de l'équation initiale.

En conclusion, les solutions de l'inéquation sont les x trouvés dans chacun des cas ci-dessus. Dès lors, $\{x \in \mathbb{R} \mid x-|x| < 1-|x-1|\} =]-\infty,0[\cup]0,1] \cup]1,2[=]-\infty,0[\cup]0,2[$.

(b) Vu la définition de h, l'inégalité du point (a) est équivalente à $h(x) < 0$. On regarde donc sur le graphique quels sont les x tels que $h(x)$ se situe strictement en dessous de l'axe des x. On voit que c'est le cas pour tous les $x < 2$ à l'exception de $x = 0$, i.e., pour les $x \in \,]-\infty, 2[\, \setminus \{0\}$, ce qui est bien la même réponse qu'au point (a).



Question 8. *Soit D la droite représentée ci-dessous. Donnez une équation cartésienne de D. Expliquez votre démarche.*



La droite D passe par le point $(1,2)$. De plus, le dessin indique qu'un vecteur directeur de D est $(-3, \frac{-1}{2})$. La pente de D vaut donc $\frac{\frac{-1}{2}}{-3} = \frac{1}{6}$. Comme D n'est pas une droite verticale, une équation cartésienne de D est de la forme $y = mx + p$. On a déjà $m = \frac{1}{6}$. Donc $D \equiv y = \frac{1}{6}x + p$.
Comme $(1,2) \in D$, on trouve p en remplaçant x par 1 et y par 2 : $2 = \frac{1}{6} \cdot 1 + p$. Donc $p = 2 - \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$.
En conclusion, $D \equiv y = \frac{1}{6}x + \frac{11}{6}$.