Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (6 octobre 2014) **Correction**

Question 1. *Calculez*

(a)
- $\dfrac{8^{1/3}\cdot(4^{-2})^{1/4}}{2^{-1}} = \dfrac{(2^3)^{1/3}\cdot 4^{-1/2}}{2^{-1}} = \dfrac{2^1\cdot(4^{1/2})^{-1}}{2^{-1}} = \dfrac{2\cdot(\sqrt{4})^{-1}}{2^{-1}} = 2$
- $32^{-4/5} = \big((32)^{1/5}\big)^{-4} = 2^{-4} = (2^4)^{-1} = 16^{-1} = 1/16$

(b) la forme trigonométrique de

- $\sqrt{2}-\sqrt{6}\mathbf{i} = \sqrt{2}(1-\sqrt{3}\mathbf{i}) = 2\sqrt{2}\Big(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\Big) = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{5\pi}{3}$
- $\big(\sqrt{2}-\sqrt{6}\mathbf{i}\big)^{-2} = \Big(2\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{5\pi}{3}\Big)^{-2} = (2\sqrt{2})^{-2}\Big(\big(\operatorname{cis}\dfrac{5\pi}{3}\big)^{-1}\Big)^2 = \dfrac{1}{8}\Big(\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3}\Big)^2 = \dfrac{1}{8}\operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{3}$
- $\cos\dfrac{\pi}{9} - \mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{9} = \overline{\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{9}} = \Big(\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{9}\Big)^{-1} = \operatorname{cis}\dfrac{17\pi}{9}.$

On a utilisé le fait que si $|z| = 1$ alors $\overline{z} = z^{-1}$.

(c) la forme algébrique de $(3-3\mathbf{i})^{-1} = \dfrac{\overline{3-3\mathbf{i}}}{|3-3\mathbf{i}|^2} = \dfrac{3+3\mathbf{i}}{3^2+3^2} = \dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}\mathbf{i}$

Question 2. *Soit le système*

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ 5x-3y=1 \end{cases}$$

(a) Résolvez ce système dans le plan $\mathbb{R}^2$. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

(b) Résolvez ce système dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

(a) Le déterminant du système vaut $1(-3)-5\cdot 2 = -13 \neq 0$. Le système admet donc une unique solution. De la première équation, on a : $x = 4-2y$. En remplaçant dans la deuxième équation, on obtient $-3y = 1-5(4-2y)$, c'est-à-dire $-3y = 10y-19$ qui est équivalent à $13y = 19$, c'est-à-dire $y = \frac{19}{13}$.

Donc $x = 4-\frac{38}{13} = \frac{14}{13}$.

L'ensemble des solutions est $\Big\{\Big(\dfrac{14}{13},\dfrac{19}{13}\Big)\Big\}$.

Géométriquement, chaque équation du système est une équation cartésienne d'une droite. Nous avons donc ici deux droites qui se coupent au point $(\frac{14}{13},\frac{19}{13})$.

(b) Nous cherchons les triplets $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ qui vérifient simultanément les équations $x+2y+0z=4$ et $5x-3y+0z=1$. De (a) nous en déduisons que tout triplet de la forme $(\frac{14}{13},\frac{19}{13},\lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, est solution du système.

L'ensemble des solutions est donc $\left\{\left(\frac{14}{13},\frac{19}{13},\lambda\right) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Géométriquement, chaque équation du système est une équation cartésienne d'un plan. Nous avons donc deux plans qui se coupent suivant la droite dont une équation paramétrique est $(x,y,z) = (\frac{14}{13},\frac{19}{13},0)+\lambda(0,0,1)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Cette droite passe par $(\frac{14}{13},\frac{19}{13},0)$ et admet $(0,0,1)$ comme vecteur directeur.

Question 3. *Complétez les affirmations suivantes par « beaucoup plus grand », « beaucoup plus petit » ou « à peu près la même chose », afin qu'elles soient vraies.*

- *Si $x \approx 0$, alors x^3 est* $\boxed{\text{beaucoup plus petit}}$ *que x^2.*
- *Si $x > 0$ est très grand, alors x^{2014} est* $\boxed{\text{beaucoup plus petit}}$ *que e^x.*
- *Si $x \approx 0$, alors $\sqrt{x}$ est* $\boxed{\text{beaucoup plus grand}}$ *que x.*
- *Si $x > 0$ est très grand, alors $\dfrac{1}{x}$ est* $\boxed{\text{beaucoup plus grand}}$ *que $\dfrac{1}{x^2}$.*
- *Si $x \approx 0$, alors $\left|\dfrac{x}{x^3+1}\right|$* $\boxed{\text{à peu près la même chose}}$ *que $|x|$.*
- *Si $x \approx -1$, alors $\left|\dfrac{x}{x^3+1}\right|$* $\boxed{\text{beaucoup plus grand}}$ *que $|x|$.*
- *Si $x > 0$ est très grand, alors $\left|\dfrac{x}{x^3+1}\right|$* $\boxed{\text{beaucoup plus petit}}$ *que $|x|$.*
- *Si $x > 0$ est très grand, alors $\dfrac{1}{x}$ est* $\boxed{\text{beaucoup plus grand}}$ *que e^{-x}.*

Question 4. *Prouvez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme de tous les naturels de 0 à n, c'est-à-dire $0+1+2+\cdots+n$, vaut $\dfrac{n(n+1)}{2}$.*

- Cas de base : $n=0$. Le premier membre vaut 0 par construction. Le second vaut $\frac{0\cdot 1}{2}=0$.
- Récurrence. Supposons que la propriété soit vraie pour tous les naturels n tels que $0 \leqslant n \leqslant k$, pour $k \geqslant 0$.

  Sous cette hypothèse de récurrence, prouvons que la propriété est vraie pour $n=k+1$, c'est-à-dire que $0+1+2+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

  En utilisant l'hypothèse de récurrence, le premier membre est égal à

$$\begin{aligned}\frac{k(k+1)}{2}+k+1 &= \frac{k(k+1)+2k+2}{2}\\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}.\end{aligned}$$

Question 5. *On a vu que, pour tout nombre complexe z tel que $z \notin \mathbb{R}_0^+$, on a les deux égalités*

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \qquad \textit{et} \qquad z^{-1} = |z|^{-1} \operatorname{cis}\big(2\pi - \operatorname{Arg} z\big).$$

Que pouvez-vous déduire de ces deux égalités ?

Notons que la première égalité est valide si $z \neq 0$ et la seconde si $z \notin \mathbb{R}^{\geqslant 0}$. Il s'en suit que si $z \notin \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, on peut comparer les deux égalités et obtenir $\frac{\bar{z}}{|z|^2} = |z|^{-1} \operatorname{cis}\big(2\pi - \operatorname{Arg} z\big)$. Donc dans ce cas, $\frac{\bar{z}}{|z|} = \operatorname{cis}\big(2\pi - \operatorname{Arg} z\big)$ et puisque $|z| = |\bar{z}|$, on a $\frac{\bar{z}}{|\bar{z}|} = \operatorname{cis}\big(2\pi - \operatorname{Arg} z\big)$.

Question 6. *Résolvez l'inéquation $\sqrt{x+2} \leqslant |x| - 1$. L'ensemble des solutions doit être exprimé sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est). Expliquez et justifiez votre démarche.*

Commençons par remarquer que l'inéquation $\sqrt{x+2} \leqslant |x| - 1$ n'a de sens que si $x+2 \geqslant 0$ puisqu'on prend la racine carrée de ce terme. Autrement dit, les conditions d'existence de cette inéquation sont $x \geqslant -2$.

Pour pouvoir élever au carré (et ainsi éliminer la racine carrée), on doit faire attention au signe du membre de droite.

- Si $|x| - 1 < 0$, i.e., si $-1 < x < 1$, l'inéquation n'a pas de solution car $\sqrt{x+2}$ est $\geqslant 0$ et ne peut donc être inférieur à un nombre négatif.
- Si $|x| - 1 \geqslant 0$, i.e., si[1] $x \in [-2, -1] \cup [1, +\infty[$, on obtient une équation équivalente en élevant les deux membres au carré :

  $$x + 2 = \big(\sqrt{x+2}\big)^2 \leqslant \big(|x| - 1\big)^2 = x^2 - 2|x| + 1,$$

  c'est-à-dire

  $$x^2 - 2|x| - x - 1 \geqslant 0. \tag{1}$$

  Pour éliminer la valeur absolue, distinguons deux cas.

  (a) Si $x \in [-2, -1]$, on a $|x| = -x$ et l'inéquation (1) devient

  $$x^2 + x - 1 \geqslant 0.$$

  Les racines du polynôme du second degré sont $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. On constate facilement que[2] $-2 < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1 < 0 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Comme le coefficient de x^2 est positif, le polynôme $x^2 + x - 1 \geqslant 0$ est positif à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur. Les x satisfaisant l'inéquation originelle sont dont, pour ce cas, $x \in [-2, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}]$.

[1] On a vu au cours que $|x| \geqslant a$ si et seulement si $x \leqslant -a$ ou $x \geqslant a$. Les conditions d'existence ont été prises en compte pour avoir l'intervalle final.

[2] Par exemple, $-2 < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ est équivalent à $-4 < -1 - \sqrt{5}$, c'est-à-dire à $-3 < -\sqrt{5}$ ou encore à $3 > \sqrt{5}$ et on voit facilement que cette dernière inégalité est vraie en élevant ses deux membres au carré.

(b) Si $x \in [1, +\infty[$, on a $|x| = x$ et l'inéquation (1) devient

$$x^2 - 3x - 1 \geqslant 0.$$

Les racines du polynôme du second degré sont $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$. On constate facilement que $\frac{3-\sqrt{13}}{2} < 0 < 1 < \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. De nouveau, comme le coefficient de x^2 est positif, le polynôme $x^2 - 3x - 1 \geqslant 0$ est positif à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur. Les x satisfaisant l'inéquation originelle sont dont, pour ce cas, $x \in [\frac{3+\sqrt{13}}{2}, +\infty[$.

En regroupant les solutions trouvées aux points (a) et (b), on déduis que les solutions de $\sqrt{x+2} \leqslant |x| - 1$ sont les x qui appartiennent à l'ensemble

$$\Big[-2, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\Big] \cup \Big[\frac{3+\sqrt{13}}{2}, +\infty\Big[.$$

Question 7.

(a) Donnez une équation cartésienne du plan α passant par $(1,-1,2)$ et parallèle au plan OYZ.

(b) Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par le point $(-1,2,3)$ et parallèle à la droite $D' \equiv (x,y,z) = (\lambda+2, -4, 5\lambda+1)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Voir correction du test 4, 10 octobre 2011, question 5.

Question 8.

Soient les droites $D_1 \equiv \lambda x + 2y = 4$ et $D_2 \equiv \lambda x + (\lambda+1)y = \lambda + 3$ où λ est un paramètre réel. Donnez l'ensemble $D_1 \cap D_2$ en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Rechercher l'ensemble $D_1 \cap D_2$ revient à chercher les couples (x,y) qui vérifient simultanément les deux équations, donc à résoudre le système suivant en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \lambda x + 2y = 4 \\ \lambda x + (\lambda+1)y = \lambda + 3 \end{cases}$$

Le déterminant du système vaut $\lambda(\lambda+1) - 2\lambda = \lambda^2 - \lambda$. Il s'annule ssi $\lambda(\lambda-1) = 0$ ssi $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

- Si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$, alors le déterminant est non nul et le système possède une unique solution notée (x^*, y^*) donnée par les formules de Cramer :

$$x^* = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ \lambda+3 & \lambda+1 \end{vmatrix}}{\lambda(\lambda-1)} = \frac{4\lambda + 4 - 2\lambda - 6}{\lambda(\lambda-1)} = \frac{2\lambda - 2}{\lambda(\lambda-1)} = \frac{2}{\lambda},$$

$$y^* = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 4 \\ \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix}}{\lambda(\lambda-1)} = \frac{\lambda^2 + 3\lambda - 4\lambda}{\lambda(\lambda-1)} = \frac{\lambda^2 - \lambda}{\lambda(\lambda-1)} = 1.$$

  Donc $D_1 \cap D_2 = \{(\frac{2}{\lambda}, 1)\}$.

- Si $\lambda = 0$, le système s'écrit

$$\begin{cases} 2y = 4, \\ y = 3, \end{cases} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{cases} y = 2, \\ y = 3. \end{cases}$$

Comme ces deux équations doivent être vérifiées en même temps, ce système n'a pas de solutions. Donc $D_1 \cap D_2 = \varnothing$.

- Si $\lambda = 1$, le système s'écrit

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Le système se réduit donc à l'équation $x = 4 - 2y$. Donc, $D_1 \cap D_2 = \{(4 - 2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Question 9. *Soient les ensembles*

$$S_1 := \{(2 - \alpha, \alpha + 3) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \quad \textit{et} \quad S_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (x, y) | (1, -4) \rangle = 0\}.$$

Représentez graphiquement chaque ensemble en expliquant la démarche qui mène à votre construction.

L'ensemble S_1 est constitué des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x, y) = (2 - \alpha, \alpha + 3)$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $(x, y) = (2, 3) + \alpha(-1, 1)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. L'ensemble S_1 est donc la droite passant par $(2, 3)$ et dont un vecteur directeur est $(-1, 1)$.
L'ensemble S_2 est constitué des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ qui satisfont l'équation $x - 4y = 0$. Il s'agit de la droite passant par $(0, 0)$ et dont un vecteur normal est $(1, -4)$.