

# Mathématique Élémentaire

Test n° 5

(13 octobre 2014)

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Veillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

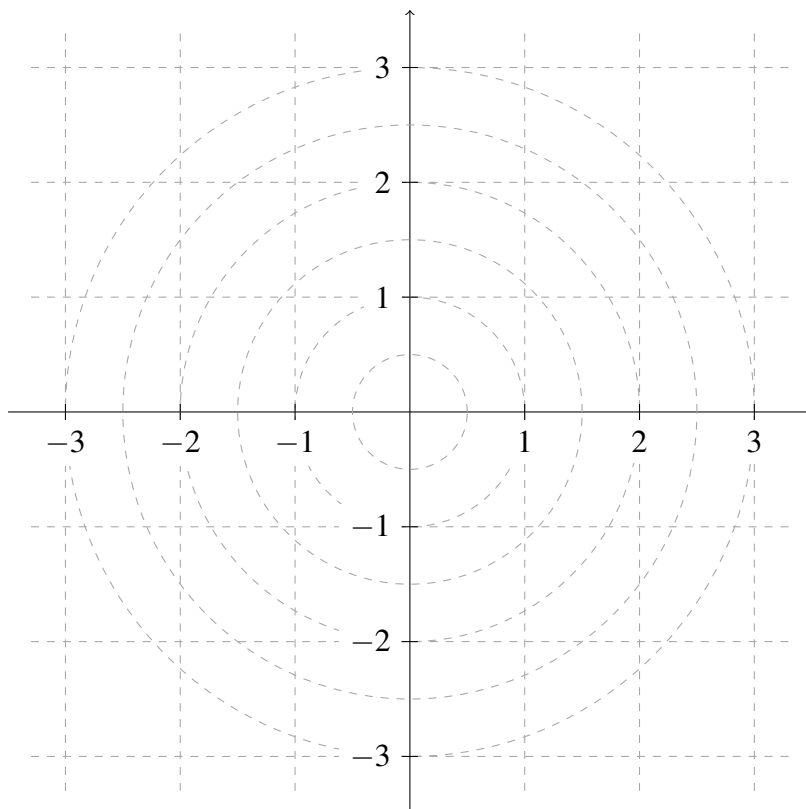
- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Représentez dans le plan complexe les ensembles suivants :

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \text{ et } \cos(\text{Arg}(z)) = \frac{1}{2}\},$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\},$$

$$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z^{-1}| = 2\}.$$



/ 3

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2. Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite  $D$  passant par  $(2, -1, 9)$  et dont un vecteur directeur est simultanément orthogonal aux vecteurs  $(4, 5, 6)$  et  $(-3, -1, 0)$ .

/4

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 3. Résolvez l'inéquation suivante

$$\frac{1}{|x+1|-1} \leq \frac{1}{\sqrt{x+4}} \quad (1)$$

c'est-à-dire, donnez l'ensemble des solutions sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est). Vérifiez la forme de votre réponse en esquissant un graphique. Expliquez votre démarche.

/5

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4. Soient les ensembles

$$A = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid (\alpha, \beta, \gamma) \text{ est un vecteur orthogonal au vecteur } (4, -1, -1)\},$$

$$B = \left\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid (\alpha, \beta, \gamma) \text{ est un vecteur directeur de la droite } D \equiv \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{7}\right\}.$$

■ Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

(a) Vrai :  Faux :   $(0, 0, 0) \in A$ .

(b) Vrai :  Faux :   $(0, 0, 0) \in B$ .

(c) Vrai :  Faux :   $(-\frac{5}{13}\pi, -\pi, -\frac{7}{13}\pi) \in B$ .

(d) Vrai :  Faux :   $(1, 2, 3) \in B$ .

(e) Vrai :  Faux :  Il existe un vecteur  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ ,  $(\alpha, \beta, \gamma) \in A$  et  $(\alpha, \beta, \gamma) \notin B$ .

■ Décrivez géométriquement l'ensemble A.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5. Prouvez par récurrence que, pour tout  $n \geq 4$ ,  $\left| \left( 3 \operatorname{cis} \left( \frac{9}{28} \pi \right) \right)^n \right| > 2^{n+2}$ .

/3

# Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (13 octobre 2014)

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 6. Résolvez dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $X^2 + (3 - \mathbf{i})X + (2 + \mathbf{i}) = 0$ .

/3

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 7. Résolvez dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $X^3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ . Donnez les solutions sous forme trigonométrique. Représentez-les sur le graphique ci-dessous sachant que les cercles sont de rayon  $2^{\pm 1/n}$  pour quelques valeurs successives de  $n \in \mathbb{N}$ .

/6

