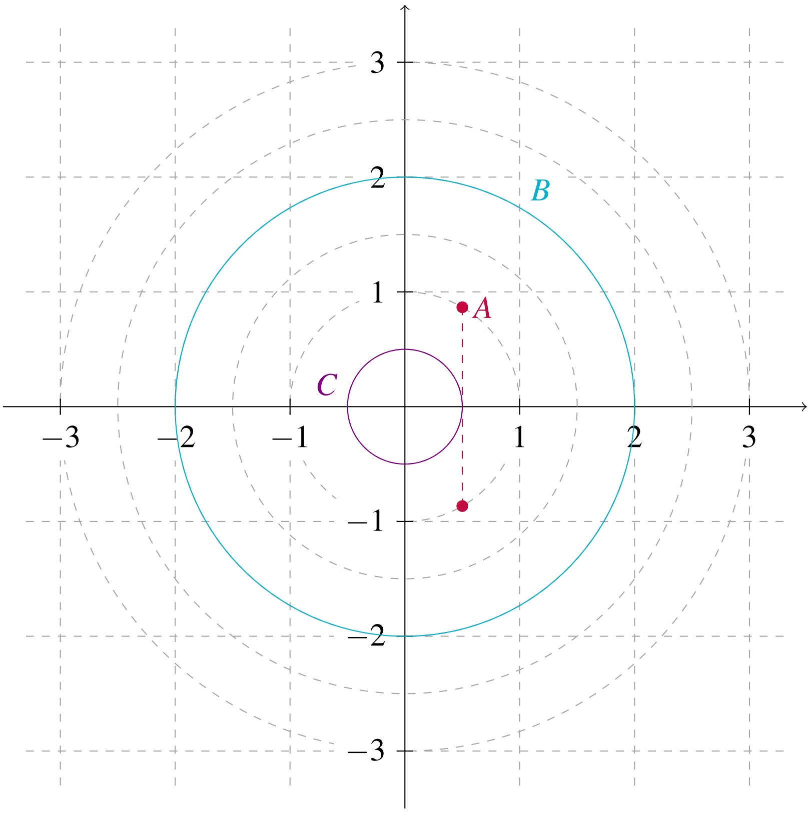
Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (13 octobre 2014)

Correction

Question 1. *Représentez dans le plan complexe les ensembles suivants :*

$$A = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \text{ } et \text{ } \cos(\mathrm{Arg}(z)) = \tfrac{1}{2}\right\},$$
$$B = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\right\},$$
$$C = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z^{-1}| = 2\right\}.$$



Soit $z \in \mathbb{C}$, $|z|^{-1} = |z^{-1}|$ donc $|z^{-1}| = 2$ est équivalent à $|z|^{-1} = 2$, c'est-à-dire $|z| = \frac{1}{2}$. L'ensemble C est donc le cercle de rayon $1/2$.

L'ensemble A est l'intersection de la droite d'abscisse $1/2$ et du cercle de rayon 1.

L'ensemble B est le cercle de rayon 2 par définition du module d'un complexe.

Question 2. *Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par* $(2,-1,9)$ *et dont un vecteur directeur est simultanément orthogonal aux vecteurs* $(4,5,6)$ *et* $(-3,-1,0)$.

Notons (a,b,c) un vecteur directeur de la droite. On sait que (a,b,c) est simultanément orthogonal aux vecteurs $(4,5,6)$ et $(-3,-1,0)$. Le produit scalaire entre (a,b,c) et ces deux vecteurs vaut donc 0. On est donc amené à résoudre le système

$$\begin{cases} 4a+5b+6c=0, \\ -3a-b=0. \end{cases}$$

La deuxième équation donne $b=-3a$. En remplaçant dans la première équation, on obtient $4a-15a+6c=0$, c'est-à-dire $6c=11a$, ou encore $c=\frac{11}{6}a$. En prenant $a=6$ par exemple, on trouve $b=-18$ et $c=11$. Par conséquent, $(6,-18,11)$ est un vecteur directeur de la droite D. Donc

$$D \equiv \frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{-18}=\frac{z-9}{11}.$$

Question 3. *Résolvez l'inéquation suivante*

$$\frac{1}{|x+1|-1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x+4}} \tag{1}$$

c'est-à-dire, donnez l'ensemble des solutions sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est). Vérifiez la forme de votre réponse en esquissant un graphique. Expliquez votre démarche.

Commençons par examiner les conditions sous lesquelles (1) a un sens. Premièrement, le dénominateur $|x+1|-1 \neq 0$, c'est à dire $|x+1| \neq 1$ ou encore, $x+1 \neq 1$ et $x+1 \neq -1$. Donc, $x \neq 0$ et $x \neq -2$. Par ailleurs, on a besoin que $\sqrt{x+4} \neq 0$ et $x+4 \geqslant 0$ ce qui revient à $x > -4$. Les conditions d'existence sont donc

$$x \in \,]-4,+\infty[\, \setminus \{-2,0\}.$$

Regardons le signe de $|x+1|-1$. On a déjà géré le cas d'égalité avec 0, examinons quand $|x+1|-1<0$.

- Si $x<-1$, $|x+1|-1<0$ est équivalent à $-(x+1)-1<0$, c'est-à-dire $x>-2$ ou encore, vu les x avec lesquels on travaille $x \in \,]-2,-1[$.
- Si $x \geqslant -1$, $|x+1|-1<0$ est équivalent à $(x+1)-1<0$, c'est-à-dire $x<0$, ou encore $x \in [-1,0[$.

Les solutions de cette inéquation sont donc $x \in \,]-2,0[$. On en conclut le tableau de signe suivant (puisque l'inégalité $|x+1|-1 \geqslant 0$ donnera le complémentaire de l'ensemble précédent et on a déjà traité le cas d'égalité avec 0) :

x		-2		0	
$\lvert x+1\rvert-1$	$+$	0	$-$	0	$+$

Distinguons maintenant deux cas.

(a) Si $x \in \,]-2,0[$, le membre de gauche de (1) est < 0 tandis que celui de droite est > 0. L'inégalité (1) est donc satisfaite pour tous les

$$x \in \,]-2,0[.$$

(b) Si $x \in \,]-4,-2[\,\cup\,]0,+\infty[$, les deux dénominateurs de (1) sont > 0 et donc (1) est équivalente à

$$\sqrt{x+4} \leqslant |x+1| - 1.$$

Comme les deux membres sont positifs, on obtient une inégalité équivalente en les élevant au carré :

$$\begin{aligned} x+4 &\leqslant \big(|x+1|-1\big)^2 \\ &= |x+1|^2 + 1 - 2|x+1| \\ &= (x+1)^2 + 1 - 2|x+1| \\ &= x^2 + 2x + 2 - 2|x+1| \end{aligned}$$

ou encore

$$0 \leqslant x^2 + x - 2 - 2|x+1|. \tag{2}$$

- Si $x \in \,]-4,-2[$, $x+1 < 0$ et donc (2) devient $x^2 + 3x \geqslant 0$. Vu le tableau de signe (obtenu par la procédure standard qui consiste à calculer les racines et à regarder le signe du coefficient de x^2) :

x		-4		-3		-2		0	
x^2+3x	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

  les solutions pour ce cas sont
  $$x \in \,]-4,-3].$$

- Si $x \in \,]0,+\infty[$, $x+1 > 0$ et (2) devient $0 \leqslant x^2 - x - 4$. Le tableau de signe du polynôme du second degré étant

x		$\frac{1-\sqrt{17}}{2}$		0		$\frac{1+\sqrt{17}}{2}$	
x^2-x-4	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

  Les solutions dans ce cas sont donc $x \in \left[\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right[$.

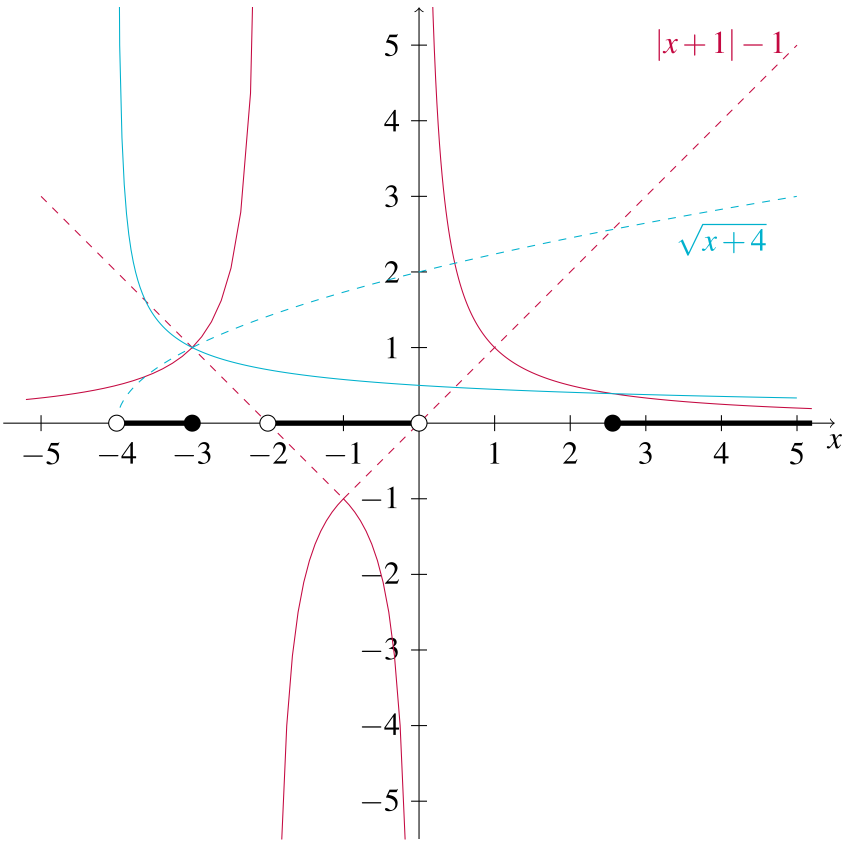
En rassemblant les solutions trouvées dans les différents cas ci-dessous, on trouve que

$$(1) \Leftrightarrow x \in \,]-4,-3] \cup \,]-2,0[\, \cup \left[\frac{1+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right[.$$

Pour vérifier les solutions graphiquement, commençons par tracer les deux dénominateurs (avec des tirets). Le graphe de la fonction $x \mapsto |x+1| - 1$ est celui de $x \mapsto |x|$ translaté d'une unité vers la gauche et d'une unité vers le bas. Le graphe de $x \mapsto \sqrt{x+4}$ est celui de $x \mapsto \sqrt{x}$ translaté de 4 unités vers la gauche. La construction des deux fonctions suit un raisonnement identique : le signe de $\frac{1}{z}$ est le même que celui de z et quand $z \approx 0$ (respectivement $|z|$ grand), $\frac{1}{z}$ est grand (resp ≈ 0). Notons que lorsque $x > 0$ est très grand

$$\frac{1}{|x+1|-1} \approx \frac{1}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}} \approx \frac{1}{\sqrt{x+4}}$$

et donc l'inégalité est vraie pour ces x. L'inégalité (1) demande de trouver les x tels que le graphe de $x \mapsto \frac{1}{|x+1|-1}$ (courbe rouge) se trouve en dessous du graphe de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+4}}$ (courbe bleue). Ces x sont surlignés en noir.



Question 4. *Soient les ensembles*

$A = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid (\alpha,\beta,\gamma)$ *est un vecteur orthogonal au vecteur* $(4,-1,-1)\}$,

$B = \left\{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (\alpha,\beta,\gamma) \text{ est un vecteur directeur de la droite } D \equiv \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{7}\right\}$.

- *Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.*

(a) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $(0,0,0) \in A$.

$(0,0,0) \in A$ car $(0,0,0)$ est un vecteur orthogonal au vecteur $(4,-1,-1)$. En effet, $\langle (0,0,0) | (4,-1,-1) \rangle = 0$.

(b) Vrai : ☐ *Faux :* ☑ $(0,0,0) \in B$.

$(0,0,0) \notin B$ car l'ensemble des vecteurs directeurs de la droite D est constitué des vecteurs de la forme $\lambda(5,13,7)$ avec $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Or, le seul réel λ qui vérifie $(0,0,0) = \lambda(5,13,7)$ est $\lambda = 0$.

(c) Vrai : ☑ *Faux :* ☐ $\left(-\frac{5}{13}\pi, -\pi, -\frac{7}{13}\pi\right) \in B$.

Un vecteur directeur de D est $(5,13,7)$. Or $(\frac{-5}{13}\pi, -\pi, \frac{-7}{13}\pi) = \frac{-\pi}{13} \cdot (5,13,7)$. Ces vecteurs ont donc la même direction. Donc $(\frac{-5}{13}\pi, -\pi, \frac{-7}{13}\pi)$ est une vecteur directeur de D.

(d) Vrai : ☐ *Faux :* ☑ $(1,2,3) \in B$.

$(1,2,3)$ n'est pas un vecteur directeur de la droite D. En effet, si c'était le cas, il existerait un réel λ tel que $(1,2,3) = \lambda(5,13,7)$ c'est-à-dire, $1/5 = \lambda$, $2/13 = \lambda$ et $3/7 = \lambda$. Ces trois égalités ne sont pas vérifiées par un même réel λ.

(e) Vrai : ☑ *Faux :* ☐ *Il existe un vecteur* $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $(\alpha,\beta,\gamma) \neq (0,0,0)$, $(\alpha,\beta,\gamma) \in A$ *et* $(\alpha,\beta,\gamma) \notin B$.

Prenons $(\alpha,\beta,\gamma) = (0,1,-1)$. On a $(\alpha,\beta,\gamma) \neq (0,0,0)$. De plus, $(\alpha,\beta,\gamma) \in A$ car $\big\langle (0,1,-1) \big| (4,-1,-1) \big\rangle = 0 - 1 + 1 = 0$ et $(\alpha,\beta,\gamma) \notin B$ car $(0,1,-1)$ n'est pas un multiple non nul de $(5,13,7)$.

- *Décrivez géométriquement l'ensemble A.*

  L'ensemble A est constitué des vecteurs (α,β,γ) tels que $\big\langle (\alpha,\beta,\gamma) \big| (4,-1,-1) \big\rangle = 0$ c'est-à-dire $4\alpha - \beta - \gamma = 0$. L'ensemble A décrit donc le plan d'équation $4x - y - z = 0$. Ce plan passe par $(0,0,0)$ et admet $(4,-1,-1)$ comme vecteur normal.

Question 5. *Prouvez par récurrence que, pour tout* $n \geqslant 4$, $\left|\left(3\operatorname{cis}\left(\frac{9}{28}\pi\right)\right)^n\right| > 2^{n+2}$.

On a que $\left|3\operatorname{cis}\left(\frac{9}{28}\pi\right)\right| = 3$ car $|\operatorname{cis}\theta| = 1$ quel que soit θ. Puisque $|z^n| = |z|^n$ on a donc que $\left|\left(3\operatorname{cis}\left(\frac{9}{28}\pi\right)\right)^n\right| = 3^n$. La proposition à prouver est donc équivalente à dire que, pour tout $n \geqslant 4$, $3^n \geqslant 2^{n+2}$.

Cas de base. On pose $n = 4$. Le premier membre vaut 81 le second vaut $2^6 = 64$. On a bien $81 \geqslant 64$.

Récurrence. Supposons que la proposition est vérifiée pour les naturels n tels que $4 \leqslant n \leqslant k$ avec $k \geqslant 4$. Sous cette hypothèse de récurrence, démontrons que la proposition reste vraie pour $n = k+1$, c'est-à-dire que nous devons prouver que $3^{k+1} \geqslant 2^{(k+1)+2}$.

On a $3^{k+1} = 3^k \cdot 3$. Par hypothèse de récurrence, on a $3^k \geqslant 2^{k+2}$. Il s'ensuit que $3^{k+1} \geqslant 2^{k+2} \cdot 3 \geqslant 2^{k+2} \cdot 2$, c'est-à-dire $3^{k+1} \geqslant 2^{k+3}$.

Question 6. *Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^2+(3-\mathbf{i})X+(2+\mathbf{i})=0$.*

Le discriminant de l'équation est

$$\begin{aligned}\Delta &= (3-\mathbf{i})^2-4(2+\mathbf{i})\\ &= 8-6\mathbf{i}-8-4\mathbf{i}\\ &= -10\mathbf{i}.\end{aligned}$$

L'équation auxiliaire à résoudre est donc $\Lambda^2=-10\mathbf{i}$. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de cette équation sont

$$\lambda_1=\sqrt{10}\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) \qquad \text{et} \qquad \lambda_2=-\lambda_1.$$

En effet, $\lambda_2^2=\lambda_1^2=\Big(\sqrt{10}\big(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\big)\Big)^2=\big(\sqrt{10}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}\big)^2=\big(\sqrt{10}\big)^2\big(\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}\big)^2=10\operatorname{cis}\frac{6\pi}{4}=10\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}=-10\mathbf{i}$.
Par conséquent, les solutions de l'équation de départ sont

$$\begin{aligned}x_1=\frac{-(3-\mathbf{i})+\lambda_1}{2}=\frac{-3+\mathbf{i}+\sqrt{10}\big(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\big)}{2} &= -\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\mathbf{i}\Big(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\Big)\\ &= -\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\mathbf{i}\end{aligned}$$

et

$$x_2=\frac{-(3-\mathbf{i})+\lambda_2}{2}=\frac{-3+\mathbf{i}+\sqrt{10}\big(\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\big)}{2}=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\mathbf{i}.$$

Question 7. *Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^3=-\sqrt{2}+\mathbf{i}\sqrt{2}$. Donnez les solutions sous forme trigonométrique. Représentez-les sur le graphique ci-dessous sachant que les cercles sont de rayon $2^{\pm 1/n}$ pour quelques valeurs successives de $n\in\mathbb{N}$.*

On a

$$-\sqrt{2}+\mathbf{i}\sqrt{2}=2\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)=2\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}.$$

Les solutions de l'équation $X^3=2\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$ sont donc de la forme (gros théorème vu en cours) $z_0\cdot u$ avec $u^3=1$ et z_0 solution de $X^3=2\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$. Une solution évidente est $z_0=\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ puisque $\big(\sqrt[3]{2}(\operatorname{cis}\frac{\pi}{4})\big)^3=(\sqrt[3]{2})^3(\operatorname{cis}\frac{\pi}{4})^3=2\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$.
Il s'ensuit que les solutions dans $\mathbb{C}$ de $X^3=2\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$ sont

- $x_1=\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$.
- $x_2=\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}=\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\frac{11\pi}{12}$.
- $x_3=\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}=\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\frac{19\pi}{12}$.