

Mathématique Élémentaire

Test n° 6

(20 octobre 2014)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Veillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1.

(a) Donnez la table de vérité de $P \vee Q \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$.

(b) Donnez la contraposée de la phrase « si je rate ce test, alors je raterai le test final ».

/3

Question 2. Calculez, si possible,

(a) $\begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}^{-1} =$

(b) $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -d \\ 0 & 0 & d & c \end{pmatrix} =$

(c) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$

(d) $(4 \ 1 \ 8) \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} =$

(e) $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} (4 \ 1 \ 8) =$

Nom : _____
Prénom : _____
Section : _____

Question 3. Soient les ensembles

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ est une solution de l'équation } Z^7 = 1 + 2i\}$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ est une solution de l'équation } Z^{14} = -3 + 4i\}$$

Montrez, sans résoudre les équations, que $A \subseteq B$.

/4

Question 4. Calculez $\partial_t \left(\frac{\ln(tx+1)}{\sqrt{x^2+tx+t^2}} \right)$.

/4

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 5.

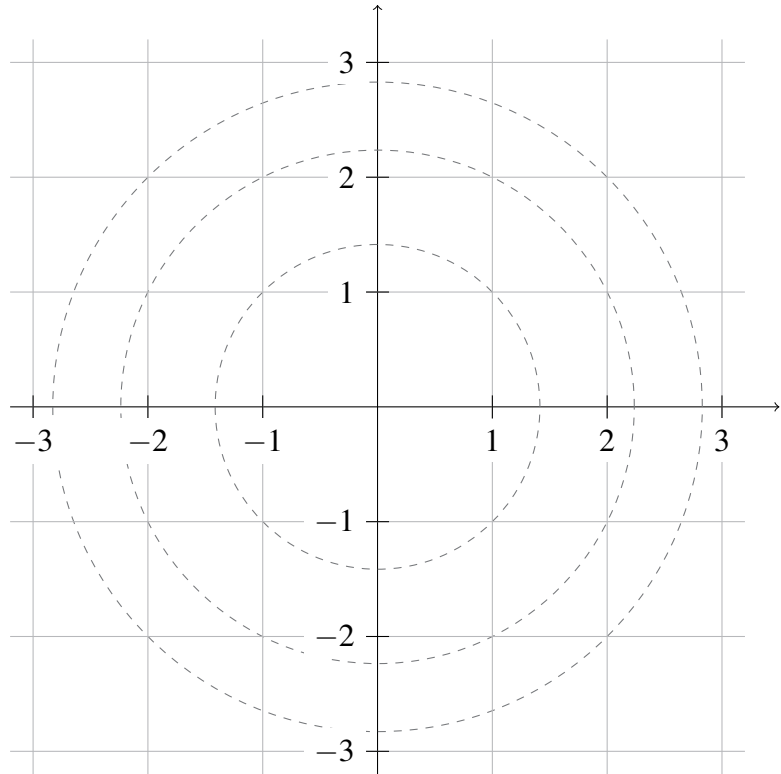
/5

- (a) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Définissez « A est une matrice symétrique ».
- (b) Soit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Montrez que la matrice $M + M^t$ est une matrice symétrique (pour rappel M^t désigne la transposée de M).
- (c) Soit $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice définie par $N_{ij} = (-1)^{i+j}(i-j)^2$. La matrice N est-elle symétrique ? Justifiez votre réponse.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 6. Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation $X^3 = -2 + 2i$. Représentez les solutions dans le plan complexe.

/6



Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 7. Soit la fonction $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{ax} \sqrt{x^2 + a^2}$ où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Déterminez toutes les valeurs de $a \neq 0$ telles que la tangente au graphe de f_a en $x = 0$ soit perpendiculaire à la droite d'équation $x + y = 1$.

/5

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 8.

/6

- (a) Soit $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Définissez « N est l'inverse de M ».
- (b) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Sous quelle condition la matrice A est-elle inversible ? Donnez alors l'inverse de A . Vérifiez votre réponse en utilisant le point précédent.
- (c) Soit la matrice $S = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de λ la matrice S est-elle égale à son inverse ? Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.