Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (20 octobre 2014) **Correction**

Question 1.

(a) Donnez la table de vérité de $P \vee Q \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$.

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$\neg P \wedge Q$	$P \vee Q \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0

(b) Donnez la contraposée de la phrase « si je rate ce test, alors je raterai le test final ».

Si je ne rate pas le test final alors je n'ai pas raté ce test.

Question 2. *Calculez, si possible,*

(a) $$\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}^{-1} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}\begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$$

par la formule de la question 8 (b) car $\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$.

(b) $$\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -d \\ 0 & 0 & d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 & ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ac-bd & -ad-bc \\ 0 & 0 & bc+ad & ac-bd \end{pmatrix}$$

(c) $$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

(en développant par rapport à la première colonne)

$$= 0 + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 11$$

(car le déterminant d'une matrice triangulaire vaut le produit des éléments situés sur la diagonale principale)

$$= 264$$

(d) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ *Il est impossible de faire ce produit car la première matrice possède 3 colonnes alors que la seconde n'a que 2 lignes.*

(e) $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -8 \\ 24 & 6 & 48 \end{pmatrix}$

Question 3. *Soient les ensembles*

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ est une solution de l'équation } Z^7 = 1 + 2\mathbf{i}\}$$
$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ est une solution de l'équation } Z^{14} = -3 + 4\mathbf{i}\}$$

Montrez, sans résoudre les équations, que $A \subseteq B$.

Voir la correction de la question 3 de l'examen du 20 octobre 2006.

Question 4. *Calculez* $\partial_t\Big(\dfrac{\ln(tx+1)}{\sqrt{x^2+tx+t^2}}\Big)$.

On a
$$\partial_t\Big(\frac{\ln(tx+1)}{\sqrt{x^2+tx+t^2}}\Big) = \frac{\partial_t\big(\ln(tx+1)\big)\sqrt{x^2+tx+t^2} - \ln(tx+1)\partial_t\sqrt{x^2+tx+t^2}}{(\sqrt{x^2+tx+t^2})^2}$$
$$= \frac{\frac{\partial_t(tx+1)}{tx+1}\sqrt{x^2+tx+t^2} - \ln(tx+1)\frac{\partial_t(x^2+tx+t^2)}{2\sqrt{x^2+tx+t^2}}}{x^2+tx+t^2}$$
$$= \frac{2x(x^2+tx+t^2) - (tx+1)(x+2t)\ln(tx+1)}{2(tx+1)(x^2+tx+t^2)^{3/2}}$$

Question 5.

(a) *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Définissez « A est une matrice symétrique ».*

(b) *Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Montrez que la matrice $M + M^t$ est une matrice symétrique (pour rappel M^t désigne la transposée de M).*

(c) *Soit $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par $N_{ij} = (-1)^{i+j}(i-j)^2$. La matrice N est-elle symétrique ? Justifiez votre réponse.*

(a) A est une matrice symétrique ssi $A^t = A$, c'est-à-dire ssi $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, $A^t_{ij} = A_{ij}$.

(b) Il faut montrer que $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on a $(M+M^t)^t_{ij} = (M+M^t)_{ij}$. Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.
On a :
$$\begin{aligned}(M+M^t)^t_{ij} &= (M+M^t)_{ji} && \text{par définition de la transposée}\\ &= M_{ji} + M^t_{ji} && \text{par définition de l'addition de deux matrices}\\ &= M^t_{ji} + M_{ji} && \text{car l'addition dans } \mathbb{R} \text{ est commutative}\\ &= M_{ij} + M^t_{ij} && \text{par définition de la transposée}\\ &= (M+M^t)_{ij} && \text{par définition de l'addition dans } \mathbb{R}^{n\times n}.\end{aligned}$$
Autre méthode : On a vu au cours que $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $(A+B)^t = A^t + B^t$.

$$\begin{aligned}\text{Donc } (M+M^t)^t &= M^t + (M^t)^t && \text{grâce à cette propriété}\\ &= M^t + M\\ &= M + M^t && \text{car l'addition dans } \mathbb{R}^{n\times n} \text{ est commutative.}\end{aligned}$$

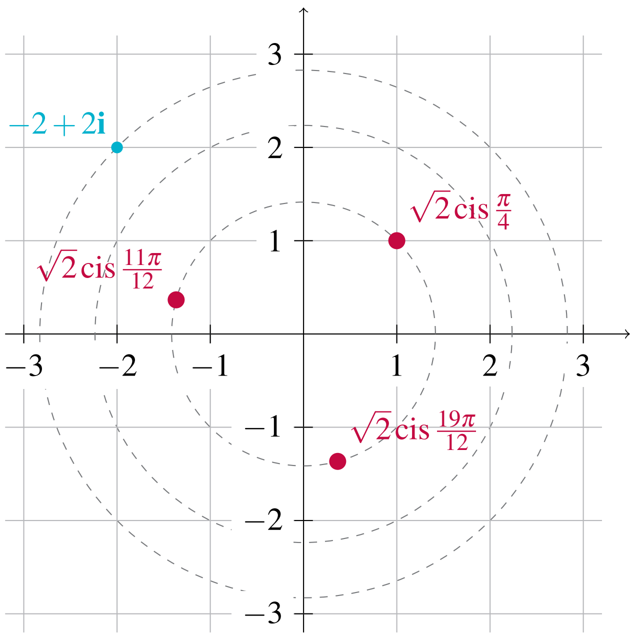
(c) La matrice N est symétrique. En effet, soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

$$\begin{aligned}\text{On a } N^t_{ij} &= N_{ji} && \text{par définition de la transposée}\\ &= (-1)^{j+i}(j-i)^2 && \text{par définition de la matrice } N\\ &= (-1)^{i+j}(-1)^2(i-j)^2\\ &= (-1)^{i+j}(i-j)^2 = N_{ij}.\end{aligned}$$

Donc $N^t = N$.

Question 6. *Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $X^3 = -2+2\mathbf{i}$. Représentez les solutions dans le plan complexe.*

Le module de $-2+2\mathbf{i}$ est $\sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. De plus, $-2+2\mathbf{i}$ se trouve sur la bissectrice du quadrant « x négatif et y positif » (c'est-à-dire abscisse négative et ordonnée positive). Par conséquent $-2+2\mathbf{i} = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$.
Il s'ensuit qu'une solution particulière de $X^3 = -2+2\mathbf{i}$ est $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$. En effet $\left(\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)^3 = 2\sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$.
Par conséquent, les solutions de $X^3 = -2+2\mathbf{i}$ sont $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\cdot u$ où u est solution de $X^3 = 1$, c'est-à-dire que les solutions sont $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\cdot 1$, $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$ et $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$; ou encore $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$, $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{11\pi}{12}$ et $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{19\pi}{12}$.



Question 7. *Soit la fonction* $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sqrt{x^2+a^2}$ *où* $a \in \mathbb{R}$ *est un paramètre. Déterminez toutes les valeurs de* $a \neq 0$ *telles que la tangente au graphe de* f_a *en* $x = 0$ *soit perpendiculaire à la droite d'équation* $x + y = 1$.

La pente de la tangente au graphe de f_a en $x = 0$ est donnée par $\partial_x f_a(0)$. On calcule :

$$\begin{aligned}\partial_x f_a(x) &= \partial_x(\mathrm{e}^{ax})\sqrt{x^2+a^2} + \mathrm{e}^{ax}\partial_x(\sqrt{x^2+a^2})\\ &= \mathrm{e}^{ax}\partial_x(ax)\sqrt{x^2+a^2} + \mathrm{e}^{ax}\frac{\partial_x(x^2+a^2)}{2\sqrt{x^2+a^2}}\\ &= a\mathrm{e}^{ax}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{\mathrm{e}^{ax}x}{\sqrt{x^2+a^2}}.\end{aligned}$$

Dès lors $\partial_x f_a(0) = a|a|$. Comme on demande que cette droite soit perpendiculaire à la droite d'équation $x + y = 1$, le produit de leurs pentes doit valoir -1. Vu que la pente de $x + y = 1$ vaut -1, la question se réduit à trouver les $a \in \mathbb{R}$ tels que $\partial_x f_a(0) = 1$, c'est-à-dire $a|a| = 1$. Distinguons deux cas.

- Si $a \geqslant 0$, l'équation se réduit à $a^2 = 1$. Les solutions sont $a = 1$ et $a = -1$ mais on doit exclure la dernière vu qu'on travaille avec $a \geqslant 0$.
- Si $a < 0$, l'équation se réduit à $-a^2 = 1$. Cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Au final, le seul a qui satisfait la condition est $a = 1$.

Question 8.

(a) *Soit* $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Définissez « N est l'inverse de M ».*

(b) *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *où* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. *Sous quelle condition la matrice A est-elle inversible ? Donnez alors l'inverse de A. Vérifiez votre réponse en utilisant le point précédent.*

(c) *Soit la matrice* $S = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix}$ *où* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Pour quelle(s) valeur(s) de* λ *la matrice S est-elle égale à son inverse ? Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

(a) N est l'inverse de M ssi $N \cdot M = \mathbb{1} = M \cdot N$.

(b) A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $ad - bc \neq 0$. On a alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

En effet, $A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On démontre de manière analogue que $A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}$.

(c) On a $\det S = -9+2\lambda$. Donc S est inversible ssi $\lambda \neq \frac{9}{2}$. Par (b),

$$S^{-1} = \frac{1}{-9+2\lambda}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -\lambda & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{-9+2\lambda} & \frac{2}{-9+2\lambda} \\ \frac{-\lambda}{-9+2\lambda} & \frac{3}{-9+2\lambda} \end{pmatrix}.$$

On veut que $S^{-1} = S$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \frac{-3}{-9+2\lambda} & \frac{2}{-9+2\lambda} \\ \frac{-\lambda}{-9+2\lambda} & \frac{3}{-9+2\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix}.$$

Par définition de l'égalité entre deux matrices, cela revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{-3}{-9+2\lambda} = 3 & (1) \\ \dfrac{2}{-9+2\lambda} = -2 & (2) \\ \dfrac{-\lambda}{-9+2\lambda} = \lambda & (3) \\ \dfrac{3}{-9+2\lambda} = -3 & (4) \end{cases}$$

De (1), nous avons $-3 = -27+6\lambda$, c'est-à-dire $6\lambda = 24$, ou encore $\lambda = 4$. En remplaçant λ par 4 dans (2), on a bien que $2/(-1) = -2$, dans (3), on a bien $\frac{-4}{-1} = 4$ et dans (4), on a bien $3/(-1) = -3$. Les quatre équations sont donc vérifiées. En conclusion $S^{-1} = S$ ssi $\lambda = 4$.