Mathématiques Élémentaires

Examen (28 octobre 2015)

Nom : ␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣

Prénom : ␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣

Section : ␣␣␣␣␣

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles.
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !
- Il est interdit d'avoir son téléphone sur soi — il doit être en mode silencieux dans votre sac.

Le non respect de ces consignes sera pénalisé.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).

Question 1. Calculez dans $\mathbb{C}$: /4

- $(1-7\boldsymbol{i})^2 =$
- $(1-7\boldsymbol{i})^{-1} =$
- $|1-7\boldsymbol{i}| =$
- $|1-7\boldsymbol{i}|^2 =$

Question 2. Dans le tableau de Pascal ci-dessous, on constate visuellement le phénomène suivant qui fournit la somme de certains éléments du tableau. Décrivez ce phénomène par une formule mathématique (on ne vous demande pas de la prouver). /2

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&& \\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&& \\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&& \\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&& \\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1& \\
1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1
\end{array}
$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Calculez les sommes suivantes. /6

- $\sum_{t=1}^{n}(t^2 - t + 1) =$ avec $n \geqslant 1$.

- $\sum_{v=-n}^{n}(1 - v) =$ avec $n \geqslant 0$.

- $\sum_{i=\ell_1}^{\ell_2}\sum_{j=\ell_1}^{\ell_2} 2 =$ avec $\ell_2 > \ell_1$.

- $\sum_{i=1}^{\ell_2}\sum_{j=1}^{\ell_2}(2^i - 2^j) =$ avec $\ell_2 > 1$.

Nom :

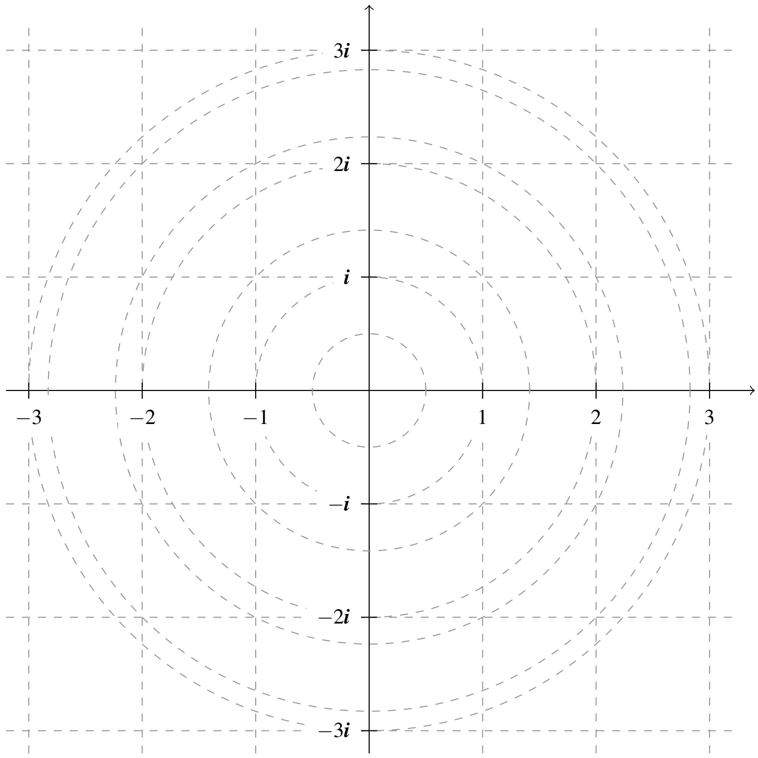
Prénom :

Section :

/8

Question 4. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^6 = 125\boldsymbol{i}$.

- Donnez les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.
- Placez ces solutions dans le plan schématisé ci-dessous.



Nom :

Prénom :

Section :

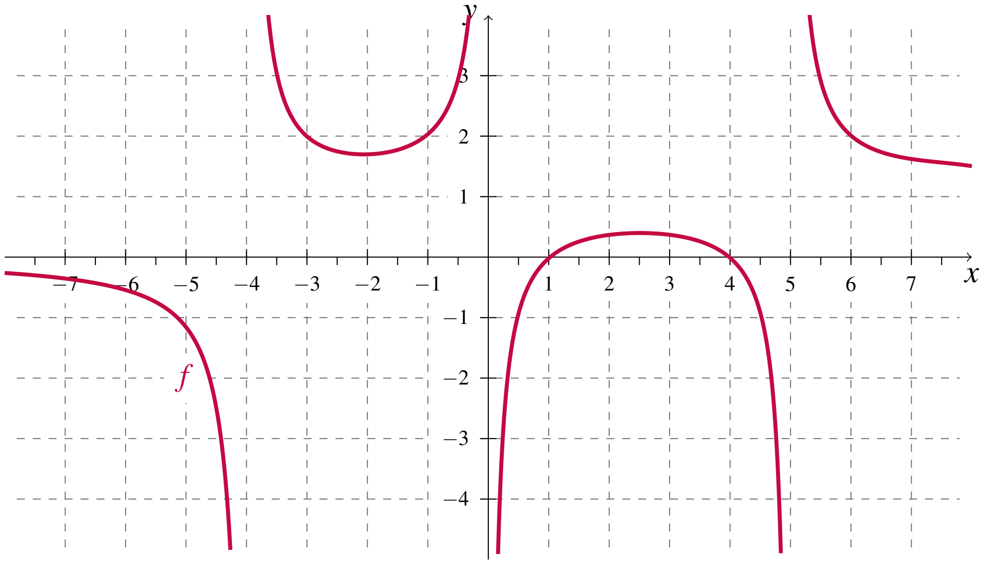
Question 5. Calculez : /4

- $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\,e^{2x}\,dx =$

- $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\,\ln(\cos x+2)\,dx =$

Question 6. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est tracé ci-dessous. /4

- Sur ce même graphique, esquissez le graphe de la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto g(x)=1/(f(x)-1)$.



- En utilisant ce graphique, écrivez l'ensemble $A := \{x\in\mathbb{R} \mid |g(x)|\leqslant 1\}$ sous la forme d'une union minimale d'intervalles.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 7. Décrivez géométriquement les ensembles suivants. /3

(a) $A := \{(x_1, x_2) \mid (x_1, x_2) \text{ est un vecteur orthogonal à } (-1, -3)\}$,

(b) $B := \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2, x_3) \text{ est un vecteur orthogonal à } (-1, -3, 0)\}$.

Question 8. Déterminez l'ensemble des valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la tangente au graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{\operatorname{arctg}(\alpha x)}$ au point $(1, f(1))$ soit perpendiculaire à la droite D d'équation $x \operatorname{arctg} 1 = y \operatorname{arctg} \alpha$. (AIDE : $\alpha \operatorname{arctg} \alpha \geqslant 0$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$.) /4

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9. Donnez l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui satisfont l'inéquation

$/6$

$$\frac{1}{x+\sqrt{x}-2} > \frac{-2}{x+1}$$

sous la forme d'une union minimale d'intervalles.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 10. /5

(a) Donnez la table de vérité de la proposition $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$. Cette proposition est-elle une tautologie ? Justifiez en donnant la définition d'une tautologie.

(b) Donnez, en bon français, la négation de la proposition suivante : « Si j'échoue au test dispensatoire, alors j'irai aux séances de remédiation ».

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 11. Soit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

/5

Montrez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}.$$

Nom :
Prénom :
Section :

/6

Question 12. Soient les plans

$$\begin{aligned}\alpha &\equiv (\lambda+1)x+\lambda y+\lambda z=\lambda,\\ \beta &\equiv x+\lambda y+z=2\lambda,\\ \gamma &\equiv x+y+\lambda z=0,\end{aligned}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ les trois plans ont-ils un unique point d'intersection ?

(b) Recherchez l'ensemble des points d'intersection des trois plans lorsque $\lambda=-5$ et lorsque $\lambda=1$.

Expliquez votre raisonnement et détaillez vos calculs.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 12 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 13.

/6

(a) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Définissez « B est l'inverse de A ».

(b) Soit la matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ où a, b, c, $d \in \mathbb{R}$. On suppose que $ad - bc \neq 0$. En utilisant la définition donnée en (a), montrez que la matrice $N := \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -c \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)^t$ est l'inverse de M.

(c) Soit la matrice

$$S := \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Calculez $S^t S$ et déduisez en S^{-1}. Expliquez votre démarche.