

Mathématiques Élémentaires

Examen

(14 janvier 2016)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles.
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !
- Il est interdit d'avoir son téléphone sur soi — il doit être en mode silencieux dans votre sac.

Le non respect de ces consignes sera pénalisé.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).

Question 1. Donnez en bon français la négation de « Si je vais en vacances, alors j'apprends l'anglais ». Justifiez votre réponse.

/2

Question 2. Calculez

■ $(4 - i)^{-1} =$

■ $\frac{2 - 3i}{4 - 3i} =$

■ $\overline{-12i + 40} =$

■ $|(2 - i)^2 \cdot (3 + i)^4| =$

/2

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 3. Soient les ensembles

$$S_1 := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid (\alpha, \beta) \text{ est un multiple non-nul du vecteur } (-1, 2)\},$$

$$S_2 := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\},$$

$$S_3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2, x_3) \text{ est un vecteur normal du plan d'équation } x + y + z = 4\}.$$

Décrivez géométriquement chaque ensemble et représentez les graphiquement. Expliquez votre démarche.

/6

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

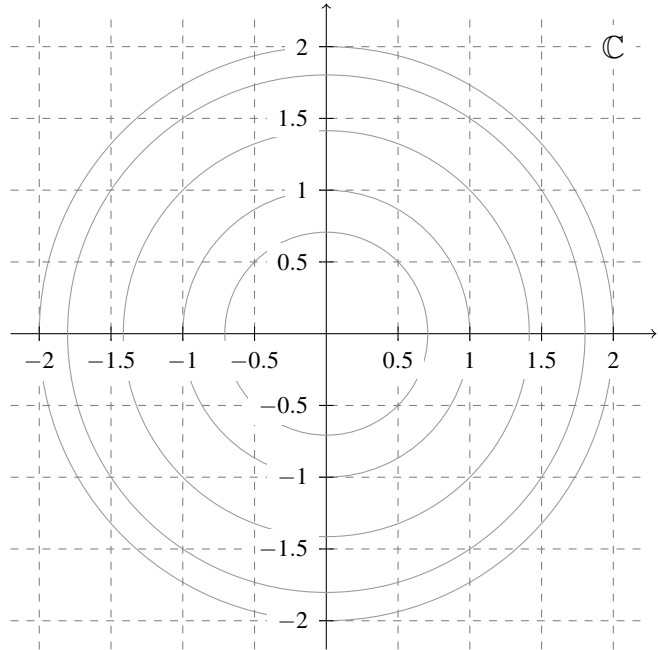
Question 4. Déterminez l'ensemble des valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la tangente au graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{12}{\pi} e^{\operatorname{arctg}(\alpha x)}$ au point $(1, f(1))$ soit perpendiculaire à la droite D d'équation $x \operatorname{arctg} 1 = y e^{\operatorname{arctg} \alpha}$. Détaillez votre raisonnement.

/5

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5. Donnez toutes les solutions complexes de l'équation $Z^3 = -8i$ sous forme trigonométrique, sous forme $a + bi$ et placez-les sur le dessin ci-dessous.

/6



Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 6. Donnez une équation cartésienne du plan α perpendiculaire au plan β d'équation $x - 2y + 5z = 3$ et contenant la droite D passant par le point $(2, 1, 1)$ et dont un vecteur directeur est $(-1, 2, 1)$.

/4

Question 7. Donnez l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui satisfont l'inéquation

$$\frac{1}{x + \sqrt{x} - 2} \geq \frac{3}{x - 4}$$

sous la forme d'une union minimale d'intervalles. Justifiez en détail vos calculs.

/6

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 8. Calculez

■ $\sum_{s=-4}^v s(s+2) =$

■ $\sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=2}^{\ell} (j^2 - i^2 + 1) =$

/ 3

Nom : _____
Prénom : _____
Section : _____

Question 9. Calculez

■ $\int_0^1 (8x+2)e^{2x^2+x+1} dx =$

■ $\int_0^1 x\sqrt{x+1} dx =$

Question 10. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice définie par

$$A_{ij} = \begin{cases} 2^i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

(a) Calculez $\sum_{i=1}^n A_{ii}$.

(b) Calculez $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}$.

/4

/4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 11.

/6

(a) Montrez, par récurrence, que pour tout $n \geq 1$,

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \begin{cases} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} & \text{si } x \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

(b) Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Calculez $\sum_{k=0}^n \text{cis}(k\theta)$

Nom : _____
Prénom : _____
Section : _____

Question 12. La proposition suivante est-elle une tautologie ?

$$((P \wedge \neg Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \vee R))$$

Justifiez votre réponse.

/3

Question 13. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \quad \text{où } m \in \mathbb{R}.$$

/5

(a) Calculez $\det A$. Pour quelles valeurs de m peut-on calculer A^{-1} ?

(b) Pour le ou les m qui annulent $\det A$, donnez l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Mathématiques Élémentaires

Examen

(14 janvier 2016)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 13 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.