

Mathématiques Élémentaires

Examen

(24 mai 2016)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles.
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !
- Il est interdit d'avoir son téléphone sur soi — il doit être en mode silencieux dans votre sac.

Le non respect de ces consignes sera pénalisé.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veuillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).

Question 1. Calculez (en simplifiant le résultat autant que possible) :

■ $\sum_{v=-3}^{\ell} \frac{v(v+1)}{2} =$

■ $\sum_{k=1}^t \sum_{\ell=0}^t (k^2 - \ell^2 + 1) =$

/5

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2. Soit la matrice $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ définie par

$$M_{ij} = (i - j)^3 + \delta_{ij} \quad \text{où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculez $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

/4

Question 3. Calculez :

■ $|(3 + i)(2 + i)^{-1}| =$

■ $\overline{i + 1} =$

■ $|\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3| =$

■ la partie réelle et la partie imaginaire de $z := \frac{1 + i}{2 - i}$.

/4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4. Prouver par récurrence sur k que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

/4

$$\partial_x^k \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad (1)$$

où, pour rappel, le symbole « ∂_x^k » signifie qu'on dérive l'expression k fois par rapport à x .

Question 5.

/4

■ Calculez $\int_0^\pi x(1 + \sin x^2) dx =$

■ En utilisant une intégration par parties, calculez $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx =$

Question 6. Soit le système

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 1, \\ x + \lambda y - z = 1, \\ -x + y + \lambda z = 1, \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

- (a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède-t-il une solution unique ?
- (b) Soit $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de A pour $\lambda = -3$.
- (c) En utilisant le point (b), résolvez le système lorsque $\lambda = -3$. Expliquez votre démarche.
- (d) Résolvez le système lorsque $\lambda = 0$ et lorsque $\lambda = 1$.

/ 10

Mathématiques Élémentaires

Examen

(24 mai 2016)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 6 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Mathématiques Élémentaires

Examen

(24 mai 2016)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 6 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 7. Donnez l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui satisfont l'inéquation

$$\frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} - 2x\sqrt{x}} \leq \frac{3}{1 - 4x}$$

sous la forme d'une union minimale d'intervalles. Justifiez en détail vos calculs.

/7

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 8.

/3

(a) La proposition $(P \vee Q) \wedge (Q \vee R) \Rightarrow R$ est-elle une tautologie ?

(b) Donnez, en bon français, la négation et la contraposée de la phrase suivante : « Si j'assiste à tous les cours pendant l'année, alors je réussis les examens ».

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

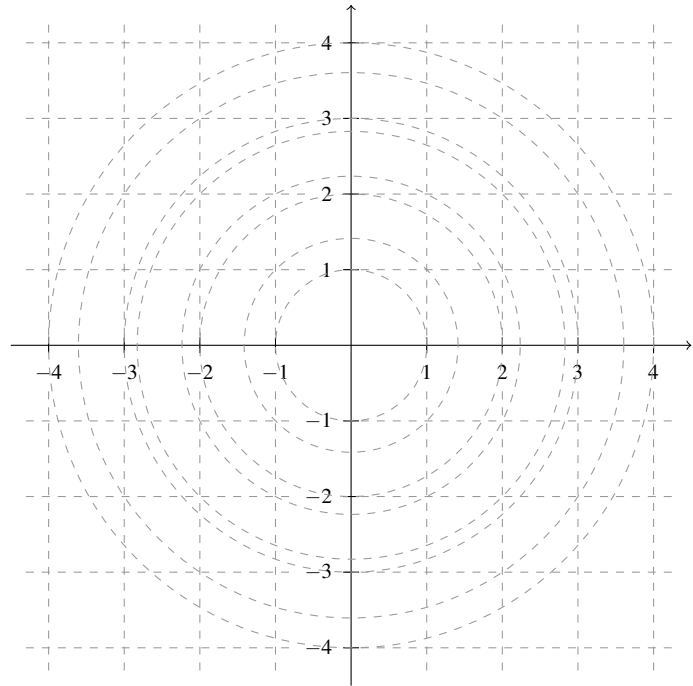
Question 9. Pour quelle(s) valeur(s) de $p, q \in \mathbb{R}$, les droites tangentes au graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto px^4 + x^2 + qx$ en $x = 0$ et en $x = 1$ sont-elles confondues.

/5

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 10. Donnez toutes les solutions complexes de l'équation $Z^4 = -4$ sous forme trigonométrique et sous forme $a + bi$. Placez ces solutions sur le dessin ci-dessous.

/8



Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 11. Soient le plan $\alpha \equiv 4x - z = 1 - 2y$ et le point P de coordonnées $(0, -2, 3)$.

/4

- (a) Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par le point P et perpendiculaire au plan α .
- (b) Déterminez le point d'intersection entre la droite D et le plan α .