

# Mathématiques Élémentaires

## Examen

(16 août 2016)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles.
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !
- Il est interdit d'avoir son téléphone sur soi — il doit être en mode silencieux dans votre sac.

Le non respect de ces consignes sera pénalisé.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veuillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).

Question 1.

(a) Donnez la table de vérité de  $A \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow (B \wedge \neg C)$ .

(b) Donnez, en bon français, la négation de la proposition suivante : « si  $\sqrt{2}$  est rationnel, alors  $1 + \sqrt{2}$  est rationnel ».

/4

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 2. Calculer les sommes suivantes :

■  $\sum_{i=-2}^k 2 =$

■  $\sum_{i=-2}^t (2 + i^2 + j) =$

/3

Question 3. Écrivez sous forme trigonométrique  $8 - (8\sqrt{3})i$ .

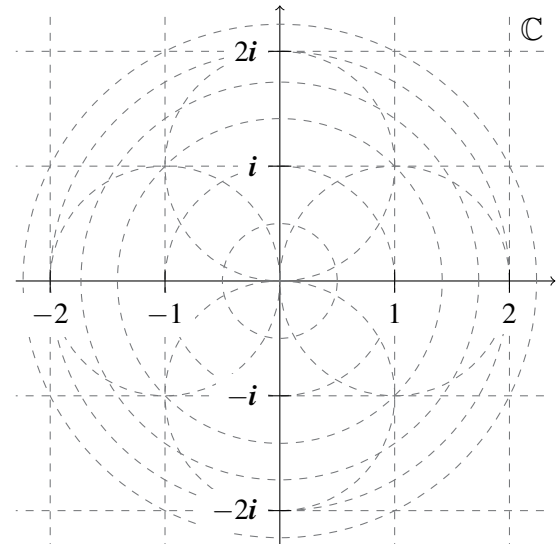
/3

Mettez sous la forme  $a + bi$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$ , le nombre complexe  $\frac{2 - 4i}{4 - 3i}$ .

Calculez  $\left| \frac{(2 - 4i)^2}{4 - 3i} \right|$ .

Question 4. Résoudre, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $X^3 = -8$ . Donnez les solutions sous les formes  $a + bi$  et trigonométrique. Représentez ces solutions dans le plan complexe.

/6



Question 5. Soit  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matrice définie par

$$M_{ij} = \begin{cases} i & \text{si } i = j, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculez  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}$ . Expliquez votre démarche.

/4

Question 6. Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(n) \leq f(n+1)$ . Montrez par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f(n) \leq f(n+k)$ .

/4

Question 7. Donnez l'ensemble des  $x \in \mathbb{R}$  qui satisfont l'inéquation

$$\frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} - 2x\sqrt{x}} \leq \frac{3}{1 - 4x}$$

sous la forme d'une union minimale d'intervalles. Justifiez en détail vos calculs.

/7

# Mathématiques Élémentaires

Examen

(16 août 2016)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 8. Quel est l'ensemble des vecteurs  $(x_1, x_2, x_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  qui sont orthogonaux aux droites  $D_1$  et  $D_2$  définies par

/5

$$D_1 \equiv 1 - x = \frac{y+2}{-3} = \frac{-z+2}{-1}$$

$$D_2 \equiv (x, y, z) = (3\lambda + 1, -\lambda - 2, 5 + \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Décrivez géométriquement l'ensemble obtenu.

Question 9.

■ Calculez  $\int_0^\pi x(1 + \sin x^2) dx =$

/4

■ En utilisant une intégration par parties, calculez  $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx =$

Question 10. Soit le système

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 1, \\ x + \lambda y - z = 1, \\ -x + y + \lambda z = 1, \end{cases}$$

où  $\lambda$  est un paramètre réel.

- (a) Pour quelle(s) valeur(s) de  $\lambda$  le système possède-t-il une solution unique ?
- (b) Soit  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de  $A$  pour  $\lambda = -3$ .
- (c) En utilisant le point (b), résolvez le système lorsque  $\lambda = -3$ . Expliquez votre démarche.
- (d) Résolvez le système lorsque  $\lambda = 0$  et lorsque  $\lambda = 1$ .

/ 10



# Mathématiques Élémentaires

Examen

(16 août 2016)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 10 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

# Mathématiques Élémentaires

Examen

(16 août 2016)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 10 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 11. Pour quelle(s) valeur(s) de  $p, q \in \mathbb{R}$ , les droites tangentes au graphe de la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto px^4 + x^2 + qx$  en  $x = 0$  et en  $x = 1$  sont-elles confondues.

/5