Mathématique Élémentaire

Test n° 2 (21 septembre 2015)

Correction

Question 1.

(a) Complétez la phrase suivante :

$(u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, v_3)$ *ssi* $\boxed{}$

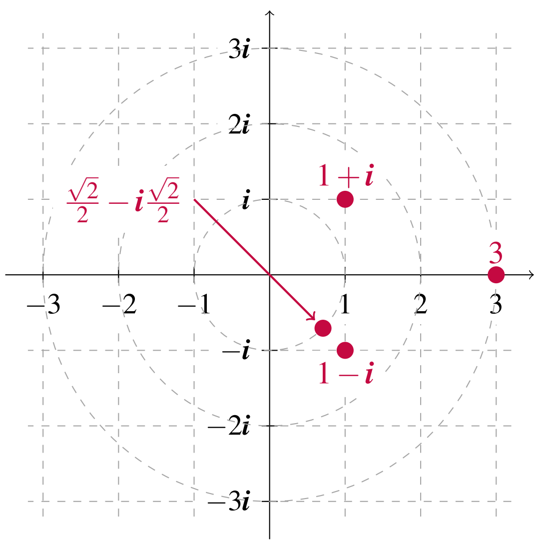
(b) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifiez votre réponse.

Il existe un réel λ *tel que* $(1,0,1) = (0,2,-2) + \lambda(3,-6,9)$.

Voir correction du Test 2, 26 septembre 2011, question 6.

Question 2. *Placez dans le plan complexe ci-dessous les complexes suivants :* 3, $1-\boldsymbol{i}$, $1+\boldsymbol{i}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$. *Pour chacun de ces nombres, calculez son module.*

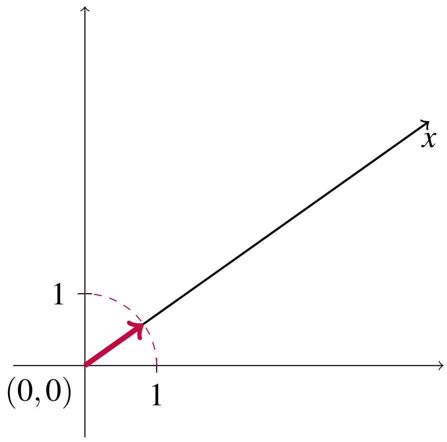
- $|3| = \sqrt{3^2+0^2} = 3$
- $|1-\boldsymbol{i}| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$
- $|1+\boldsymbol{i}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
- $$\begin{aligned} \left|\frac{\sqrt{2}}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right| &= \left|\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right| \\ &= \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| \cdot |1-i| \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 1. \end{aligned}$$



Question 3. *Calculez, dans $\mathbb{C}$,*

- $(1-3\boldsymbol{i})+(-2+4\boldsymbol{i}) = (1-2)+(-3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{i}) = -1+\boldsymbol{i}$
- $(1-3\boldsymbol{i})\cdot(-2+4\boldsymbol{i}) = 1\cdot(-2)-(-3)4+\boldsymbol{i}\big((-3)\cdot(-2)+1\cdot 4\big) = 10+10\boldsymbol{i}$
- $\overline{1-6\boldsymbol{i}} = 1+6\boldsymbol{i}$
- $|(1-\boldsymbol{i})(1+\boldsymbol{i})| = |1-\boldsymbol{i}|\cdot|1+\boldsymbol{i}|$ car on a que, pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$
  $= \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$
  $= 2$

Question 4.



(a) *Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Supposons que $u \neq 0$. Montrez que le vecteur $v = \dfrac{u}{\|u\|}$ est de norme 1. Énoncez clairement les propriétés que vous utilisez et détaillez vos calculs.*

(b) *Soit $x \in \mathbb{R}^2$ le vecteur représenté ci-contre. Sur ce même graphique, construisez de façon géométrique le vecteur $v = x/\|x\|$. Expliquez votre démarche.*

(a) Nous devons montrer que $\|v\| = 1$. On a :

$$
\begin{aligned}
\|v\| &= \left\|\frac{u}{\|u\|}\right\| && \text{par définition de } v\\
&= \left|\frac{1}{\|u\|}\right|\cdot\|u\| && \text{car pour tout } \lambda\in\mathbb{R} \text{ et } x\in\mathbb{R}^n,\ \|\lambda x\| = |\lambda|\cdot\|x\| \text{ avec } \lambda = \frac{1}{\|u\|}\\
&= \frac{1}{\|u\|}\cdot\|u\| && \text{car pour tout } x\in\mathbb{R}^+,\ |x| = x \text{ par définition de la valeur absolue}\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

(b) Voir correction du Test 2, 23 septembre 2013, question 3.

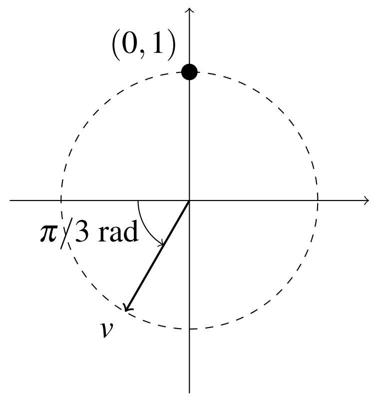
Question 5.

(a) *Soient les vecteurs $u = (0,-3,1,7)$ et $v = (4,-1,5,2)$. Calculez :*

- $(u\,|\,-v) = \big((0,-3,1,7)\,\big|\,(-4,1,-5,-2)\big)$
  $= 0\cdot(-4)-3\cdot 1+1\cdot(-5)+7\cdot(-2) = -3-5-14 = -22$
- $\|u+v\| = \|(0+4,-3-1,1+5,7+2)\| = \|(4,-4,6,9)\| = \sqrt{16+16+36+81} = \sqrt{149}$
- $\|u\|+\|v\| = \sqrt{0^2+(-3)^2+1^2+7^2}+\sqrt{4^2+(-1)^2+5^2+2^2}$
  $= \sqrt{9+1+49}+\sqrt{16+1+25+4} = \sqrt{59}+\sqrt{46}.$

(b) *Donnez les composantes du vecteur v défini sur la figure ci-contre. Expliquez votre démarche.*

Comme l'origine de v est $(0,0)$ et que son extrémité est sur le cercle trigonométrique, on a $\|v\| = 1$. L'angle θ formé par la demi-droite d'origine $(0,0)$ passant par $(1,0)$ et la demi droite d'origine $(0,0)$ passant par v est $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$rad. Donc on a vu au cours que $v = (\cos\frac{4\pi}{3}, \sin\frac{4\pi}{3}) = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.



Question 6.

(a) *Prouvez que, pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.*

(b) *Prouvez que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z\bar{z} = |z|^2$.*

(a) Posons $z_1 = a + b\boldsymbol{i}$ et $z_2 = c + d\boldsymbol{i}$. On a par définition de la multiplication complexe que $z_1 \cdot z_2 = ac - bd + (bc + ad)\boldsymbol{i}$. Donc

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= \sqrt{(ac-bd)^2 + (bc+ad)^2} \\ &= \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 - 2acbd + (bc)^2 + (ad)^2 + 2bcad} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2}. \end{aligned}$$

D'autre part, $|z_1| = \sqrt{a^2+b^2}$ et $|z_2| = \sqrt{c^2+d^2}$ par définition du module, c'est-à-dire que $|z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2}$ ce qui prouve l'égalité des deux membres.

(b) Posons $z = a + b\boldsymbol{i}$, on a $\bar{z} = a - b\boldsymbol{i}$. Donc, $z \cdot \bar{z} = (a+b\boldsymbol{i})(a-b\boldsymbol{i}) = a^2 + b^2$ et d'autre part $|z|^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2 + b^2$, ce qui prouve l'égalité.

Question 7. *Donnez une formule pour calculer $(-\boldsymbol{i})^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Expliquez votre démarche.*

On a $(-\boldsymbol{i})^0 = 1$,

$(-\boldsymbol{i})^1 = -\boldsymbol{i}$,

$(-\boldsymbol{i})^2 = (-\boldsymbol{i}) \cdot (-\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i}^2 = -1$,

$(-\boldsymbol{i})^3 = (-\boldsymbol{i})^2 \cdot (-\boldsymbol{i}) = -1 \cdot (-\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i}$ et

$(-\boldsymbol{i})^4 = (-\boldsymbol{i})^2 \cdot (-\boldsymbol{i})^2 = (-1)^2 = 1$.

Par conséquent, si on effectue la division euclidienne de n par 4, il existe $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0,1,2,3\}$ tels que $n = q \cdot 4 + r = 4 \cdot q + r$. Donc $(-\boldsymbol{i})^n = (-\boldsymbol{i})^{4q+r} = ((-\boldsymbol{i})^4)^q \cdot (-\boldsymbol{i})^r = 1^q \cdot (-\boldsymbol{i})^r = (-\boldsymbol{i})^r$. On a ainsi prouvé que $(-\boldsymbol{i})^n = (-\boldsymbol{i})^r$ où r est le reste de la division euclidienne de n par 4.

Question 8. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation*

$$X^2 - (1 - \boldsymbol{i})X - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{i} = 0.$$

Calculons le Δ de cette équation : $\big(-(1-\boldsymbol{i})\big)^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{2}\boldsymbol{i}) = -2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{i} = 0$. L'équation auxiliaire est donc $Y^2 = 0$ qui a pour solutions $y_1 = y_2 = 0$. Il s'ensuit que l'équation de départ a une seule solution (racine double) qui est $x = \frac{-(-(1-\boldsymbol{i}))+0}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\boldsymbol{i}}{2}$.

Question 9. *Montrez que $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ est une solution de l'équation $X^4 - 20X^2 + 16 = 0$.*

Par définition de solution d'une équation, on doit vérifier que

$$\big(\sqrt{3} + \sqrt{7}\big)^4 - 20\big(\sqrt{3} + \sqrt{7}\big)^2 + 16 = 0. \tag{1}$$

On a

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 &= 3 + 7 + 2\sqrt{3}\sqrt{7} = 10 + 2\sqrt{21} \\ \big(\sqrt{3} + \sqrt{7}\big)^4 &= \big((\sqrt{3} + \sqrt{7})^2\big)^2 = \big(10 + 2\sqrt{21}\big)^2 = 100 + 84 + 40\sqrt{21}. \end{aligned}$$

Par conséquent, le premier membre de (1) vaut

$$184 + 40\sqrt{21} - 20\big(10 + 2\sqrt{21}\big) + 16 = 184 + 16 - 200 + 40\sqrt{21} - 40\sqrt{21} = 0.$$