# Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (28 septembre 2015) **Correction**

---

Question 1. *Calculez dans $\mathbb{C}$,*

(a) *l'inverse de $1-\boldsymbol{i}$ et l'inverse de $7\boldsymbol{i}-3$,*

(b) *le conjugué de $7\boldsymbol{i}-3$,*

(c) *le module de $\sqrt{4}+\sqrt{4}$.*

(a) J'applique la formule (rappelée en Question 3, (b)) qui nous dit que

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Donc $(1-\boldsymbol{i})^{-1} = \frac{1+\boldsymbol{i}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\boldsymbol{i}}{2}$ car $|1-\boldsymbol{i}|^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$
et $(7\boldsymbol{i}-3)^{-1} = (-3+7\boldsymbol{i})^{-1} = \frac{-3-7\boldsymbol{i}}{|-3+7\boldsymbol{i}|^2} = \frac{-3}{58} - \frac{7}{58}\boldsymbol{i}$ ;

(b) $\overline{7\boldsymbol{i}-3} = -3-7\boldsymbol{i}$ ;

(c) $|\sqrt{4}+\sqrt{4}| = |2\sqrt{4}| = 2\sqrt{4}$ car $2\sqrt{4} \in \mathbb{R}$.

Question 2. *Soient $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Considérons la droite $D$ d'équation $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.*

(a) *Donnez la pente de $D$.*

(b) *Donnez une équation paramétrique de $D$.*

(c) *Donnez une équation cartésienne de la droite $D'$ perpendiculaire à la droite $D$ et passant par l'origine du repère.*

(a) L'équation de $D$ peut s'écrire $\dfrac{y}{b} = \dfrac{-x}{a} + 1$ ou encore $y = \dfrac{-b}{a}x + b$. La pente de $D$ vaut donc $\dfrac{-b}{a}$ puisque nous avons vu que lorsqu'une équation peut se mettre sous la forme $y = mx + p$, ce qui est le cas ici, la pente vaut $m$.

(b) On a vu au cours que le vecteur $(1, m)$, où $m$ est la pente de la droite, est un vecteur directeur. Donc, par (a), $\left(1, \dfrac{-b}{a}\right)$ est un vecteur directeur de $D$. Pour trouver un point de $D$, remplaçons par exemple $x$ par $a$ dans l'équation. On trouve $1 + \dfrac{y}{b} = 1$. Donc $y = 0$. Un point de $D$ est donc $(a, 0)$. Donc $D \equiv (x, y) = (a, 0) + \lambda\left(1, \dfrac{-b}{a}\right)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) On a vu que le produit des pentes de deux droites perpendiculaires vaut $-1$. Par (a), la pente de $D$ vaut $\frac{-b}{a}$. La pente de $D'$ vaut donc $\frac{a}{b}$ car $\frac{-b}{a} \cdot \frac{a}{b} = -1$. Donc $D' \equiv y = \frac{a}{b}x + p$. Comme $D'$ passe par $(0,0)$, on trouve $p$ en remplaçant dans l'équation $x$ et $y$ par 0. On a $p = 0$. Donc $D' \equiv y = \frac{a}{b}x$.

## Question 3.

*(a) Soit $z = a + b\boldsymbol{i} \in \mathbb{C}$. Prouvez que $z = 0$ si et seulement si $|z| = 0$. Justifiez toutes les étapes de votre preuve.*

*(b) Prouvez que si $z \neq 0$, alors $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.*

(a) $z = a + b\boldsymbol{i} = 0$
ssi $a + b\boldsymbol{i} = 0 + 0\boldsymbol{i}$
ssi $a = 0$ et $b = 0$ (par définition de l'égalité de 2 complexes)
ssi $a^2 = 0$ et $b^2 = 0$
ssi $a^2 + b^2 = 0$ (une somme de deux nombres $\geqslant 0$ est nulle ssi les deux nombres sont nuls)
ssi $\sqrt{a^2 + b^2} = 0$ (car la racine carrée d'un nombre réel positif est nulle ssi ce nombre est nul).

(b) Si $z \neq 0$, on a que $|z| \neq 0$ (voir le (a)). Donc $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ existe et est un complexe car un complexe multiplié par l'inverse d'un réel est un complexe.

Donc pour prouver que $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ est l'inverse de $z$, il suffit, par définition de la notion d'inverse de $z$, de vérifier que

$$\frac{\bar{z}}{|z|^2} \cdot z = 1. \tag{1}$$

Notez que $z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ donnera le même résultat vu que la multiplication complexe est commutative. Le premier membre de (1) est $\frac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$ car on a vu que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Question 4. *Résolvez l'inéquation $\sqrt{x+1} \geqslant x$. Exprimez l'ensemble de ses solutions sous la forme d'une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est).*

Commençons par regarder les conditions d'existence des deux membres de l'inégalité. Le seul problème est la racine. Elle existe si et seulement si $x+1 \geqslant 0$, c'est-à-dire si et seulement si

$$x \in [-1, +\infty[.$$

Pour enlever la racine, nous devons distinguer deux cas.

- Si $x < 0$, l'inégalité est forcément vérifiée puisque le radical d'un nombre est $\geqslant 0$. En tenant compte des conditions d'existence, les solutions de $\sqrt{x+1} \geqslant x$ pour ce premier cas sont les $x \in [-1, 0[$.
- Si $x \geqslant 0$, on peut élever les deux membres au carré et conserver une inégalité équivalente : $x+1 \geqslant x^2$. Celle-ci peut se réécrire $x^2 - x - 1 \leqslant 0$. Le tableau de signe du polynôme du second degré est

| $x$ | | $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ | | $0$ | | $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-x-1$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |

  En se rappelant qu'on ne travaille qu'avec les $x \geqslant 0$, on déduit que les solutions pour ce cas sont les $x \in \left[0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

En conclusion, l'ensemble des solutions de $\sqrt{x+1} \geqslant x$ est $[-1, 0[ \cup \left[0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] = \left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Question 5. *Donnez une forme alternative « plus simple » ainsi que les conditions d'existence.*

- $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ *; existe si* $x \in \mathbb{R}$ (pas de restriction sur $x$).
- $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ *; existe si* $x \geqslant 0$ (ceci afin que $\sqrt{x}$ ait un sens).

Question 6.

(a) *Donnez une équation cartésienne de la droite $D_1$ passant par le point $(-2,-1)$ et perpendiculaire à la droite $D$ dont une équation paramétrique est $(x,y) = (2-3\lambda, \lambda-4)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(b) *Donnez une équation paramétrique de la droite $D_2$ parallèle à la droite $D'$ d'équation $-5x + y = 3x + 2 - 2y$ et dont l'ordonnée à l'origine vaut $-3$.*

(a) On a $D \equiv (x,y) = (2,-4) + \lambda(-3,1)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Le vecteur $(-3,1)$ est donc un vecteur directeur de $D$. Comme $D$ et $D_1$ sont perpendiculaires, $(-3,1)$ est un vecteur normal de $D_1$. Donc, $D_1 \equiv -3x + y = c$. Comme $(-2,-1) \in D_1$, on trouve $c$ en remplaçant dans l'équation $x$ par $-2$ et $y$ par $-1$. On a $-3 \cdot (-2) - 1 = c$, donc $c = 5$. En conclusion, $D_1 \equiv -3x + y = 5$.

(b) On a $D' \equiv -5x - 3x + y + 2y = 2$ c'est-à-dire $D' \equiv -8x + 3y = 2$. Le vecteur $(-8,3)$ est un vecteur normal de $D'$. Donc $(3,8)$ est un vecteur directeur de $D'$ car il est orthogonal à $(-8,3)$. En effet, $\big((-8,3) \,\big|\, (3,8)\big) = -24 + 24 = 0$. Comme $D_2$ est parallèle à $D'$, $(3,8)$ est donc aussi un vecteur directeur de $D_2$. D'autre part, dire que l'ordonnée à l'origine vaut $-3$ revient à dire que $(0,-3) \in D_2$. En conclusion, $D_2 \equiv (x,y) = (0,-3) + \lambda(3,8)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Question 7. *On a vu que $(1-\boldsymbol{i})^2 = -2\boldsymbol{i}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Y^2 = -2\boldsymbol{i}$.*

Par définition de solution, on a que $1-\boldsymbol{i}$ est une solution de $Y^2 = -2\boldsymbol{i}$. L'autre solution est donc $-(1-\boldsymbol{i})$ car

$$\begin{aligned}
\big(-(1-\boldsymbol{i})\big)^2 &= \big((-1)\cdot(1-\boldsymbol{i})\big)^2 \\
&= (-1)^2(1-\boldsymbol{i})^2 && \text{(car la multiplication complexe est commutative)} \\
&= 1(-2\boldsymbol{i}) \\
&= -2\boldsymbol{i}
\end{aligned}$$

et donc on a que les solutions de l'équation du second degré $Y^2 = -2\boldsymbol{i}$ sont $1-\boldsymbol{i}$ et $-1+\boldsymbol{i}$.

Question 8. *Donnez les formules suivantes :*

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2$$
$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2$$

Question 9. *Placez les nombres complexes suivants dans le plan complexe et donnez leur forme trigonométrique :* $z_1 := -2 + 2\boldsymbol{i}$, $z_2 := 3\boldsymbol{i}$, $z_3 := -3\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$, $z_4 := 2\operatorname{cis}\frac{19\pi}{6}$.

- $z_1 = -2 + 2\boldsymbol{i} = 2\sqrt{2}\big(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\big) = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$.
- $z_2 = 3\boldsymbol{i} = 3\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$.
- $z_3 = -3\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3} = 3\Big(-\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3}\Big) = 3\operatorname{cis}\Big(\pi + \dfrac{\pi}{3}\Big)$.
  $= 3\operatorname{cis}\dfrac{4\pi}{3}$
- $z_4 = 2\operatorname{cis}\dfrac{19\pi}{6} = 2\operatorname{cis}\bigg(\Big(\dfrac{12}{6} + \dfrac{7}{6}\Big)\pi\bigg)$
  $= 2\operatorname{cis}\Big(2\pi + \dfrac{7}{6}\pi\Big) = 2\operatorname{cis}\dfrac{7\pi}{6}$
  car $\cos(2\pi + \frac{7}{6}\pi) = \cos\frac{7\pi}{6}$ et $\sin(2\pi + \frac{7}{6}\pi) = \sin\frac{7\pi}{6}$. En effet, sin et cos sont des fonctions périodiques de période $2\pi$.