

# Mathématique Élémentaire

Test n° 4

(5 octobre 2015)

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Veillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* ! Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).

Question 1. Écrivez sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

■  $(1 - i) \operatorname{cis} \frac{2\pi}{5} =$

■  $-4 + 4i =$

/2

Question 2.

- Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Donnez la définition de «  $f$  est strictement croissante ».

- En utilisant le fait que la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$  est strictement croissante, complétez et prouvez l'égalité suivante :  $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt[3]{x} \leq a\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \boxed{\phantom{000000}}\right\}$ .

/3

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 3. Soit le système

$$\begin{cases} (\lambda - 3)x + y = 0 \\ x + (\lambda - 3)y = 0 \end{cases}$$

où  $\lambda$  est un paramètre réel.

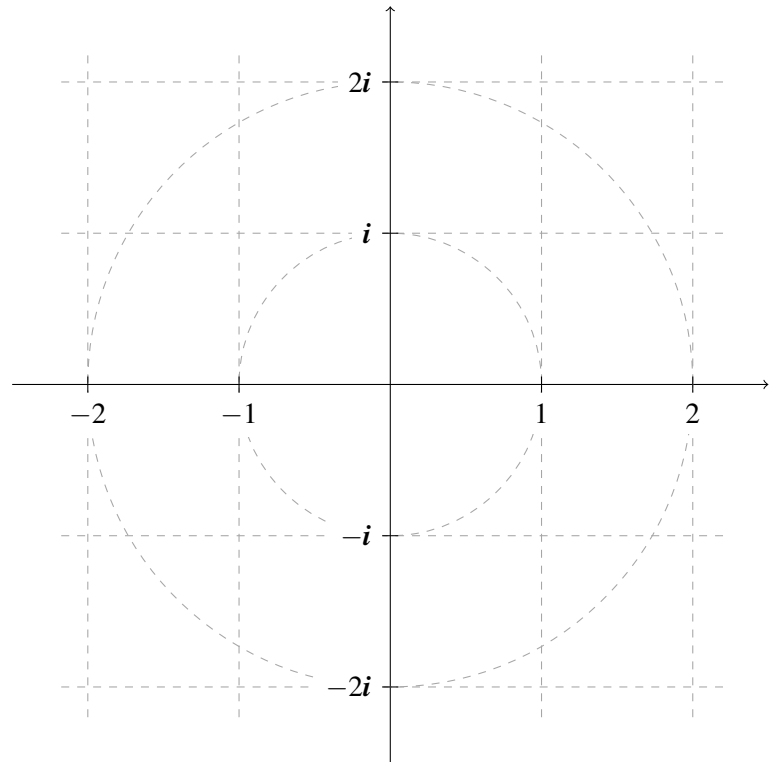
- (a) Montrez que, quelle que soit la valeur de  $\lambda$ , le système n'est jamais impossible.
- (b) Résolvez le système en fonction de  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

/4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4. Résolvez dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $X^6 = 1$  en donnant les solutions sous forme trigonométrique. Placez ces solutions dans le plan complexe.

/6



Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 5. Décrivez géométriquement les ensembles suivants et représentez les graphiquement. Détaillez les arguments qui vous permettent de décrire l'objet représenté par chaque ensemble.

/4

(a)  $A = \{(\alpha + 1, \alpha - 3) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

(b)  $B = \{(\alpha, \beta) \mid (\alpha, \beta) \text{ est un vecteur normal de la droite d'équation } x + y = 1\}$ .

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 6. Écrivez l'ensemble  $A \subseteq \mathbb{R}$  des solutions de l'inéquation

$$\sqrt{|x| - 2} \leq x - 3$$

sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).

/5

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 7. Soient les vecteurs  $x, y \in \mathbb{R}^n$  définis par  $x = (1, 1, \dots, 1)$  et  $y = (1^2, 2^2, \dots, n^2)$ .  
Montrez par récurrence que, pour tout naturel  $n \geq 2$ , on a

/4

$$(x|y) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 8.

/4

- (a) Vérifiez que  $1 - i$  est solution de l'équation  $X^5 = -4 + 4i$ .
- (b) Donnez toutes les solutions complexes de l'équation  $X^5 = -4 - 4i$ . Justifiez votre démarche.