Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (5 octobre 2015)

Correction

Question 1. *Écrivez sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :*

- $(1-\boldsymbol{i})\operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{5} = \sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\dfrac{7\pi}{4}\cdot\operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{5} = \sqrt{2}\operatorname{cis}\Big(\dfrac{7\pi}{4}+\dfrac{2\pi}{5}\Big) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\Big(\dfrac{(35+8)\pi}{20}\Big) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\Big(\dfrac{3\pi}{20}\Big)$.
- $-4+4\boldsymbol{i} = 4(-1+\boldsymbol{i}) = 4\sqrt{2}\operatorname{cis}\Big(\dfrac{3\pi}{4}\Big)$.

Question 2.

- *Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Donnez la définition de « f est strictement croissante ».*

  Pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

- *En utilisant le fait que la fonction $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R} : x \mapsto x^3$ est strictement croissante, complétez et prouvez l'égalité suivante : $\{x\in\mathbb{R} \mid \sqrt[3]{x} \leqslant a\} = \Big\{x\in\mathbb{R} \Bigm| x \boxed{\leqslant a^3}\Big\}$.*

  Pour prouver l'égalité de deux ensembles, prouvons que les deux inclusions sont vérifiées[1].

  ($\subseteq$) Prenons x^* dans l'ensemble de gauche et montrons qu'il appartient à celui de droite. L'appartenance de x^* à $\{x\in\mathbb{R} \mid \sqrt[3]{x}\leqslant a\}$ signifie qu'il vérifie la propriété $\sqrt[3]{x^*}\leqslant a$. Comme la fonction est strictement croissante, elle est en particulier croissante et on en déduit que $x^* = f(\sqrt[3]{x^*}) \leqslant f(a) = a^3$. Cette dernière inégalité montre que x^* appartient à l'ensemble $\{x\in\mathbb{R} \mid x\leqslant a^3\}$.

  ($\supseteq$) Prenons x^* dans $\{x\in\mathbb{R} \mid x\leqslant a^3\}$ c'est-à-dire qu'il vérifie $x^*\leqslant a^3$. Montrons que x^* appartient à l'ensemble de gauche, c'est-à-dire que $\sqrt[3]{x^*}\leqslant a$. Supposons au contraire qu'on n'aie pas cette inégalité. Alors, $\sqrt[3]{x^*} > a$. Puisque la fonction f est strictement croissante, on en déduit que $x^* = f(\sqrt[3]{x^*}) > a^3$ ce qui contredit l'hypothèse $x^*\leqslant a^3$.

Question 3. *Soit le système*

$$\begin{cases}(\lambda-3)x+y=0\\ x+(\lambda-3)y=0\end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) *Montrez que, quelle que soit la valeur de λ, le système n'est jamais impossible.*

(b) *Résolvez le système en fonction de $\lambda\in\mathbb{R}$. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.*

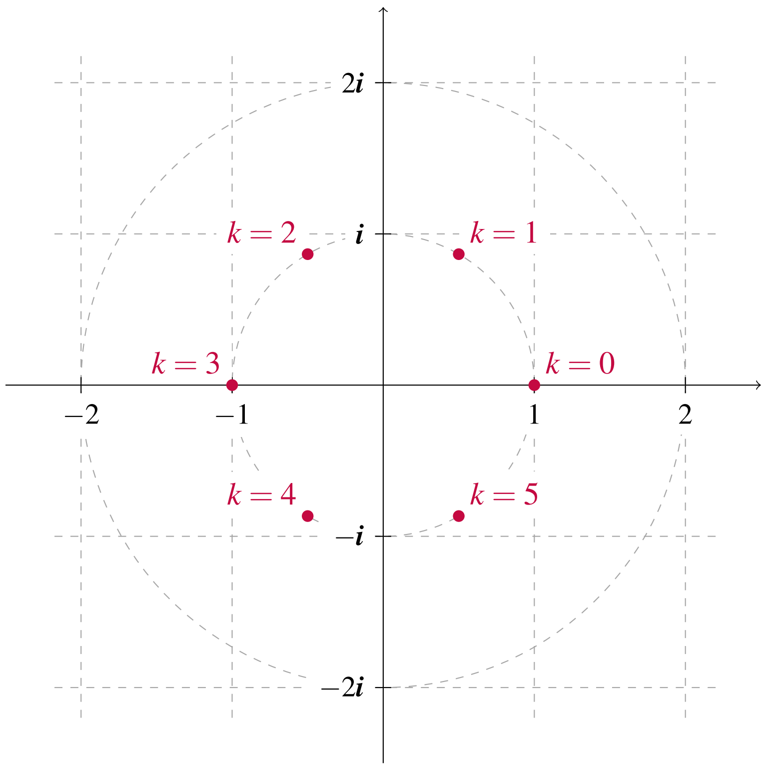
Voir correction du test 4, 8 octobre 2007, question 7.

---

[1] En effet, rappelons que si A et B sont deux ensembles, $A=B$ si et seulement si $A\subseteq B$ et $A\supseteq B$.

Question 4. *Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^6 = 1$ en donnant les solutions sous forme trigonométrique. Placez ces solutions dans le plan complexe.*

Par les formules vues en cours, les 6 solutions complexes de l'équation $X^6 = 1$ sont les complexes $\operatorname{cis}(k\frac{2\pi}{6})$, $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Sur le dessin, les valeurs de k décrivant le complexe concerné sont données sur le cercle unité.



Question 5. *Décrivez géométriquement les ensembles suivants et réprésentez les graphiquement. Détaillez les arguments qui vous permettent de décrire l'objet représenté par chaque ensemble.*

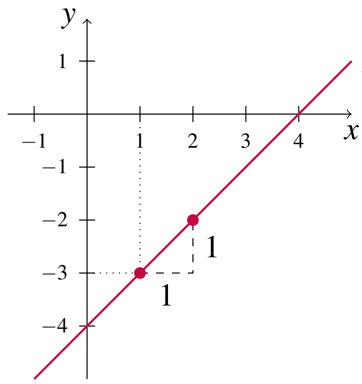
(a) $A = \{(\alpha+1, \alpha-3) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

(b) $B = \{(\alpha, \beta) \mid (\alpha, \beta)$ *est un vecteur normal de la droite d'équation* $x+y=1\}$.

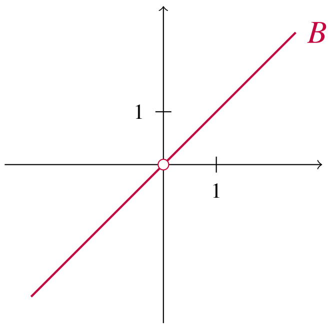
(a) On a

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) = (\alpha+1, \alpha-3) \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) = (1,-3) + \alpha(1,1) \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Il s'agit de la droite passant par $(1,-3)$ et dont un vecteur directeur est $(1,1)$.



(b) Un vecteur normal de la droite d'équation $x+y=1$ est $(1,1)$. Tout multiple non-nul de ce vecteur sera encore un vecteur normal de la droite. Donc $B=\{\lambda(1,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}_0\}$. Il s'agit de la droite d'équation $y=x$ privée du point $(0,0)$, puisque $\lambda \in \mathbb{R}_0$.



Question 6. *Écrivez l'ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ des solutions de l'inéquation*

$$\sqrt{|x|-2} \leqslant x-3$$

sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).

Commençons par nous soucier des conditions d'existence. Le seul élément auquel il faut faire attention est la racine carrée, dont le radicant doit être positif :

$$|x|-2 \geqslant 0.$$

En utilisant l'équivalence $|x| \geqslant a \Leftrightarrow (x \leq -a \text{ ou } x \geq a)$, on obtient que les x qui satisfont la condition d'existence sont les $x \in \left]-\infty,-2\right] \cup \left[2,+\infty\right[$.

Pour pouvoir élever au carré, il faut discuter du signe de $x-3$.

- Si $x-3<0$, c'est-à-dire si $x<3$, l'inégalité ne peut être vérifiée car $\sqrt{x-2} \geqslant 0$ ne peut être inférieur à un nombre négatif.

- Si $x-3 \geqslant 0$, c'est-à-dire si $x \geqslant 3$, l'inéquation est équivalente à

$$\begin{aligned} & |x|-2 \leqslant (x-3)^2 \\ \Leftrightarrow\quad & |x| \leqslant x^2-6x+11 \\ \Leftrightarrow\quad & -(x^2-6x+11) \leqslant x \text{ et } x \leqslant x^2-6x+11 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2-5x+11 \geqslant 0 \text{ et } x^2-7x+11 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Pour l'avant dernière équivalence, nous avons utilisé le résultat suivant vu en cours :

$$|x| \leqslant a \Leftrightarrow (-a \leqslant x \text{ et } x \leqslant a).$$

Pour le polynôme de gauche, $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 11 < 0$ et donc son signe est toujours le même que celui du coefficient de x^2. L'inégalité est donc toujours vérifiée. Par conséquent, le « et » se réduit à l'inégalité de droite.

Pour le polynôme de droite, $\Delta = 7^2 - 4 \cdot 11 = 5$ donc son tableau de signe est

x		$\frac{7-\sqrt{5}}{2}$		3		$\frac{7+\sqrt{5}}{2}$	
$x^2-7x+11$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

En tenant compte des x avec lesquels on travaille, on trouve que les solutions, pour ce cas, sont les $x \in \left[\frac{7+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$.

En conclusion, en mettant les deux cas ensemble et en tenant compte des conditions d'existence, on déduit que les solutions x de l'inéquation $\sqrt{|x|-2} \leqslant x-3$ sont les

$$x \in \left(\varnothing \cup \left[\frac{7+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[\right) \cap \left(\left]-\infty,-2\right] \cup \left[2,+\infty\right[\right) = \left[\frac{7+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[.$$

Question 7. *Soient les vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ définis par $x = (1,1,\dots,1)$ et $y = (1^2, 2^2, \dots, n^2)$. Montrez par récurrence que, pour tout naturel $n \geqslant 2$, on a*

$$(x|y) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- **Cas de base :** $n = 2$. Dans ce cas, $x = (1,1)$ et $y = (1^2, 2^2)$. Donc le premier membre vaut $(x|y) = 1^2 + 2^2 = 5$ et le deuxième membre vaut $\frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} = 5$. Les deux membres sont donc égaux.

- **Hypothèse de récurrence :** supposons que la propriété soit démontrée pour tout naturel n tel que $2 \leqslant n \leqslant k$ (où $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$). Sous cette hypothèse, nous devons montrer la propriété pour $n = k+1$, c'est-à-dire $(x|y) = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ où $x = (1,1,\ldots,1)$ et $y = (1^2, 2^2, \ldots, (k+1)^2)$. On a :

$$\begin{aligned}
(x|y) &= 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 && \text{(par définition du produit scalaire)}\\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 && \text{(par hypothèse de récurrence)}\\
&= (k+1)\cdot\left(\frac{k(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)}{6}\right)\\
&= \frac{k+1}{6}(2k^2+k+6k+6)\\
&= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}.
\end{aligned}$$

D'autre part, $\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$. Les deux membres sont donc égaux.

En conclusion, on a donc bien montré que pour tout $n \geqslant 2$, $(x|y) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Question 8.

(a) Vérifiez que $1 - \boldsymbol{i}$ est solution de l'équation $X^5 = -4 + 4\boldsymbol{i}$.

(b) Donnez toutes les solutions complexes de l'équation $X^5 = -4 - 4\boldsymbol{i}$. Justifiez votre démarche.

(a) Par définition de solution d'une équation, il suffit de prouver que $(1-\boldsymbol{i})^5 = -4 + 4\boldsymbol{i}$. On a $(1-\boldsymbol{i})^5 = \big((1-\boldsymbol{i})^2\big)^2(1-\boldsymbol{i}) = (-2\boldsymbol{i})^2(1-\boldsymbol{i}) = -4(1-\boldsymbol{i}) = -4+4\boldsymbol{i}$.

(b) On doit résoudre

$$X^5 = -4 - 4\boldsymbol{i}. \tag{1}$$

Première méthode. On constate que $-4-4\boldsymbol{i}$ est le conjugué de $-4+4\boldsymbol{i}$. Par (a), $1-\boldsymbol{i}$ est solution de $X^5 = -4+4\boldsymbol{i}$, c'est-à-dire $(1-\boldsymbol{i})^5 = -4+4\boldsymbol{i}$. Donc $\overline{(1-\boldsymbol{i})^5} = \overline{-4+4\boldsymbol{i}} = -4-4\boldsymbol{i}$.

Mais par la propriété « le conjugué d'un produit est le produit des conjugués », on a $\overline{(1-\boldsymbol{i})^5} = \left(\overline{1-\boldsymbol{i}}\right)^5 = (1+\boldsymbol{i})^5$. On a donc $(1+\boldsymbol{i})^5 = -4-4\boldsymbol{i}$, c'est-à-dire $1+\boldsymbol{i}$ est une solution particulière de l'équation (1). Par les résultats prouvés en cours, on sait que les solutions complexes de (1) sont donc de la forme $(1+\boldsymbol{i})\cdot u$ avec u solution de $X^5 = 1$, c'est-à-dire

$$(1+\boldsymbol{i})\cdot \operatorname{cis}\left(k\frac{2\pi}{5}\right)$$

avec $k \in \{0,1,2,3,4\}$.

Deuxième méthode. On remarque que $-4-4\boldsymbol{i} = 4(-1-\boldsymbol{i}) = 4\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4} = \left(\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)^5$. Donc (1) devient

$$X^5 = \left(\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)^5;$$

ce qui montre que $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4} = 1+\boldsymbol{i}$ est une solution particulière de (1) et on termine en utilisant le même argument (dernière phrase) que pour la première méthode.