

Mathématique Élémentaire

Test n° 5

(12 octobre 2015)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Veillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* ! Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).

Question 1. Calculez $1 + 2 + 3 + \dots + 100$.

/2

Question 2.

- Rappelez la définition de la racine carrée d'un nombre :

$y = \sqrt{x}$ si et seulement si

- À partir de cette définition, montrez que $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ quels que soient $a, b \geq 0$.

/3

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 3.

/5

- (a) Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par $(-2, 0, 1)$ et perpendiculaire au plan $\beta \equiv z = y$.
- (b) Donnez une équation cartésienne du plan α passant par le point $(0, -4, 1)$ et perpendiculaire à la droite d'intersection des plans d'équations $x + y + 2z = -1$ et $3x + 2y + 3z = 5$.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 4.

/4

(a) Calculez $(\sqrt{2}(2+i))^6$.

(b) Résolvez dans \mathbb{C} l'équation $X^6 = -936 + 352i$.

Question 5. Mettez sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

/4

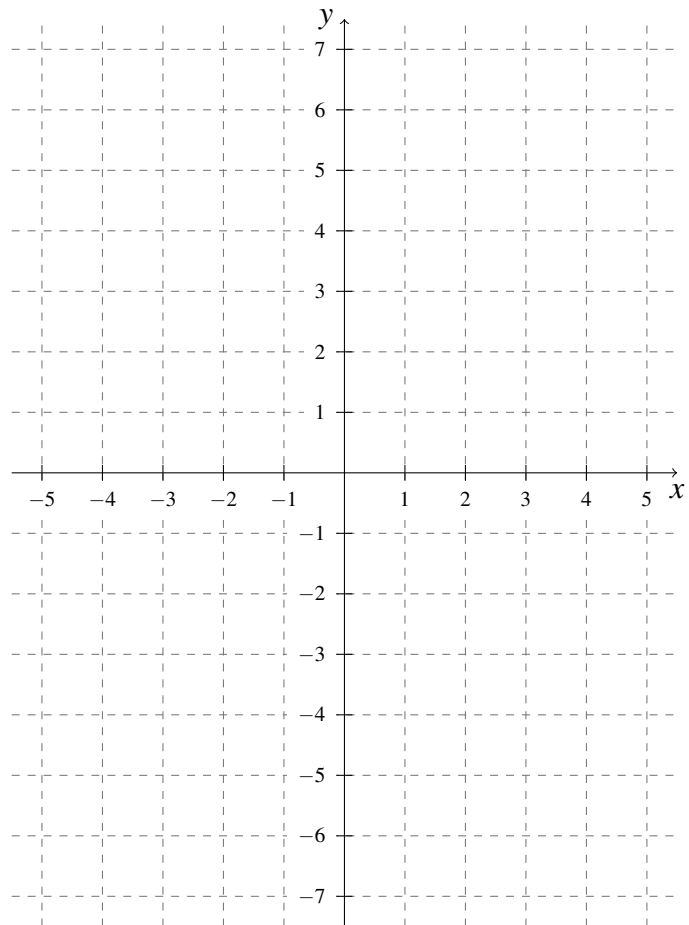
■ $\left(\operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}\right) \cdot \left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}\right) =$

■ $\sqrt{3}(i + \sqrt{3}) =$

Question 6. Esquissez le graphe de la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1 + |x|}{x + 2}$$

Expliquez quels sont les éléments qui ont conduit à votre graphe. Ensuite, résolvez algébriquement l'inéquation $f(x) \leq x$ (l'ensemble des solutions doit être écrit sous la forme d'une union minimale d'intervalles). Vérifiez la forme de cette solution à l'aide de votre graphe (expliquez comment vous faites cette vérification).

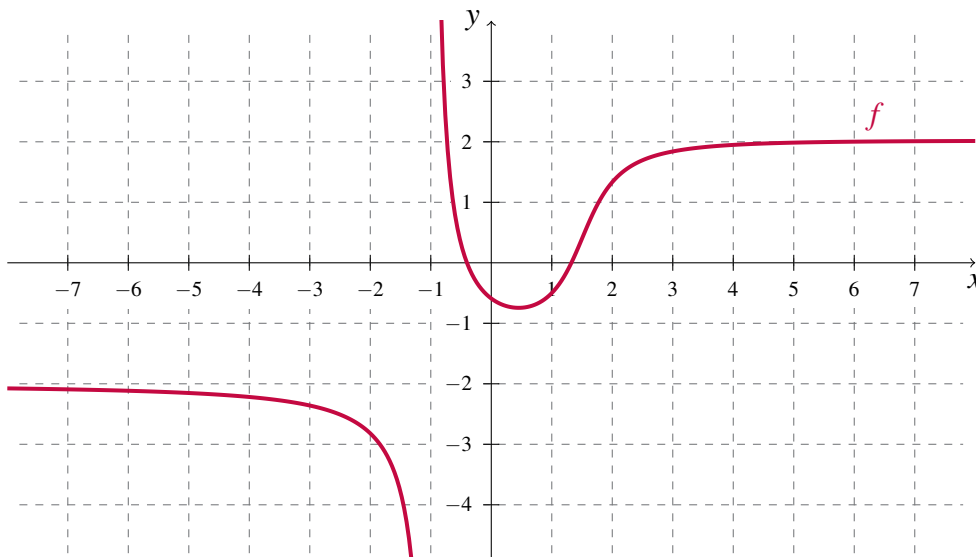


Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 6 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.

Question 7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est tracé ci-dessous. Sur ce même graphique, esquissez le graphe de la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = 1/(f(x) + 1)$.

/2



Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 8.

/5

(a) Prouvez par récurrence que, pour tout naturel n , $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

(b) Prouvez que si a est solution de l'équation $X^n = z$, alors \bar{a} est solution de $X^n = \bar{z}$.

Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (12 octobre 2015)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9. Prouvez par récurrence que $\sum_{i=0}^{\ell} (2i + 1) = (\ell + 1)^2$.

/ 3