Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (12 octobre 2015) **Correction**

Question 1. *Calculez* $1+2+3+\cdots+100$.

Cette somme est $\sum_{i=1}^{100} i = \dfrac{100(100+1)}{2}$ par la formule vue au cours qui dit que $\sum_{i=0}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Donc la valeur finale est $\frac{100\cdot 101}{2} = 5050$.

Question 2.

- *Rappelez la définition de la racine carrée d'un nombre :*

$y = \sqrt{x}$ *si et seulement si* $\boxed{y^2 = x \text{ et } y \geqslant 0.}$

- *À partir de cette définition, montrez que* $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ *quels que soient* $a, b \geqslant 0$.

  Posons $y := \sqrt{a}\sqrt{b}$. Il faut montrer que $y = \sqrt{ab}$, c'est-à-dire, vu la définition,

$$\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = ab \quad \text{et} \quad \sqrt{a}\sqrt{b} \geqslant 0.$$

  Pour la première propriété, on a $\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$ puisque la définition de la racine carrée dit en particulier que $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$. Pour la seconde propriété $\sqrt{a}\sqrt{b} \geqslant 0$, elle est vérifiée parce que, par définition de la racine carrée, $\sqrt{a} \geqslant 0$ et $\sqrt{b} \geqslant 0$ et le produit de deux nombres positifs est positif.

Question 3.

(a) *Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par $(-2,0,1)$ et perpendiculaire au plan $\beta \equiv z = y$.*

(b) *Donnez une équation cartésienne du plan α passant par le point $(0,-4,1)$ et perpendiculaire à la droite d'intersection des plans d'équations $x+y+2z=-1$ et $3x+2y+3z=5$.*

(a) On a $\beta \equiv -y+z=0$. Un vecteur normal de β est $(0,-1,1)$. Comme la droite D est perpendiculaire à ce plan, $(0,-1,1)$ est un vecteur directeur de D. En utilisant aussi $(-2,0,1)\in D$, on trouve qu'une équation paramétrique de D est

$$(x,y,z)=(-2,0,1)+\lambda(0,-1,1), \quad \text{où } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Par l'égalité entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{cases} x=-2, & \\ y=-\lambda, & (1)\\ z=1+\lambda. & (2)\end{cases}$$

De (1), on a $\lambda=-y$ et en remplaçant dans (2), on a $z=1-y$. Un système d'équations cartésiennes de D est donc

$$\begin{cases} x=-2,\\ z=1-y.\end{cases}$$

(b) On cherche une équation de la forme $ax+by+cz=d$ où (a,b,c) est un vecteur normal du plan α. Comme le plan α est perpendiculaire à la droite D, (a,b,c) est un vecteur directeur de D. D'autre part, $(1,1,2)$ (resp. $(3,2,3)$) est un vecteur normal du plan d'équation $x+y+2z=-1$ (resp. $3x+2y+3z=5$). La droite D étant contenue dans chaque plan, (a,b,c) est donc simultanément orthognal à $(1,1,2)$ et $(3,2,3)$. On a donc :

$$\begin{cases} a+b+2c=0, & (3)\\ 3a+2b+3c=0. & (4)\end{cases}$$

De (3), on a : $a=-b-2c$. En remplaçant dans (4), on a : $-3b-6c+2b+3c=0$, c'est-à-dire $b=-3c$ et donc $a=c$. En prenant $c=1$, on a : $a=1$, et $b=-3$. Donc $\alpha\equiv x-3y+z=d$. Comme $(0,-4,1)\in\alpha$, on trouve d en remplaçant x par 0, y par -4 et z par 1. Donc $d=12+1=13$. En conclusion $\alpha\equiv x-3y+z=13$.

Question 4.

(a) Calculez $\left(\sqrt{2}(2+\boldsymbol{i})\right)^6$.

(b) Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^6=-936+352\boldsymbol{i}$.

(a)
$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}(2+\boldsymbol{i})\right)^6 &= (\sqrt{2})^6(2+\boldsymbol{i})^6 = 2^3(2+\boldsymbol{i})^2\left((2+\boldsymbol{i})^2\right)^2\\ &= 8(3+4\boldsymbol{i})(3+4\boldsymbol{i})^2 = 8(3+4\boldsymbol{i})(-7+24\boldsymbol{i})\\ &= 8(-21-96+72\boldsymbol{i}-28\boldsymbol{i}) = 8(-117+44\boldsymbol{i})\\ &= -936+352\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

(b) Par (a), on connait une solution particulière de l'équation. C'est $\sqrt{2}(2+\boldsymbol{i})$. Le résultat vu au cours dit alors que les solutions de $X^6=-936+352\boldsymbol{i}$ sont de la forme $\sqrt{2}(2+\boldsymbol{i})u$ avec u solution de $X^6=1$, c'est-à-dire $\sqrt{2}(2+\boldsymbol{i})\operatorname{cis}\left(k\frac{2\pi}{6}\right)$ avec $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$, ou encore $\sqrt{2}(2+\boldsymbol{i})\operatorname{cis}\left(k\frac{\pi}{3}\right)$ avec $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$.

Question 5. *Mettez sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :*

- $\left(\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{(18+4)\pi}{24}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{11}{12}\pi\right)$
- $\sqrt{3}\,(\boldsymbol{i}+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right) = 2\sqrt{3}\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}$

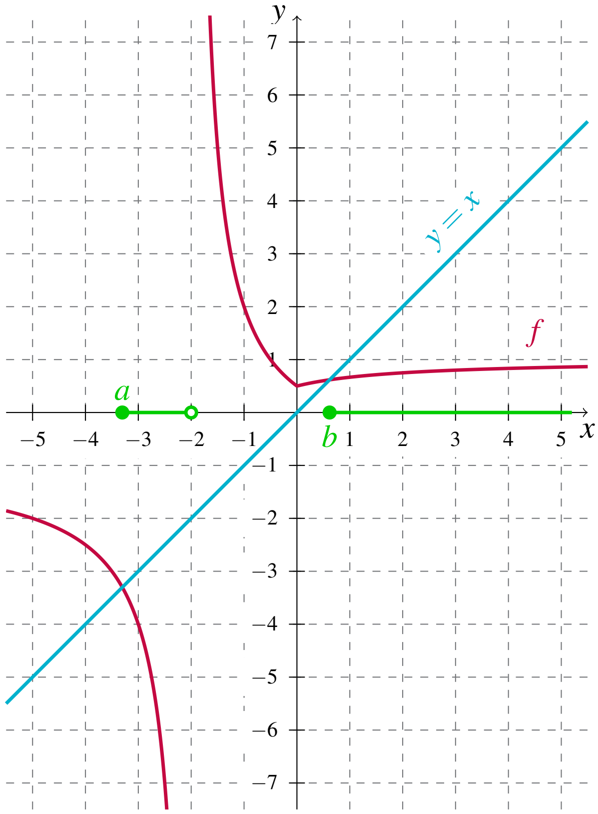
Question 6. *Esquissez le graphe de la fonction*

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\frac{1+|x|}{x+2}$$

Expliquez quels sont les éléments qui ont conduit à votre graphe. Ensuite, résolvez algébriquement l'inéquation $f(x)\leqslant x$ (l'ensemble des solutions doit être écrit sous la forme d'une union minimale d'intervalles). Vérifiez la forme de cette solution à l'aide de votre graphe (expliquez comment vous faites cette vérification).

Les éléments qui aident à esquisser le fonction f sont les suivants.

- Lorsque $x>0$ est grand, $1+|x|\approx x$ et $x+2\approx x$, d'où $f(x)\approx\frac{x}{x}=1$.
- Lorsque $x<0$ et $|x|$ est très grand, on a $1+|x|\approx -x$ et $x+2\approx x$, d'où $f(x)\approx\frac{-x}{x}=-1$.
- La fonction f n'est pas définie pour $x=-2$.
- Lorsque $x\approx-2$ et $x>-2$, $1+|x|\approx 3$ et le dénominateur $x+2\approx 0$ tout en étant positif. Par conséquent, $f(x)>0$ est très grand.
- Lorsque $x\approx-2$ et $x<-2$, $1+|x|\approx 3$ et le dénominateur $x+2\approx 0$ tout en étant négatif. Par conséquent, $f(x)<0$ et $|f(x)|$ est très grand.
- Le « coin » de $|x|$ se manifeste en 0 et $f(0)=1/2$.



Les solutions de l'inéquation $f(x)\leqslant x$ sont les x tels que le graphe de f se trouve en dessous de la droite $y=x$. La forme de l'ensemble des solutions (dessiné en vert) est donc $[a,-2[\,\cup\,[b,+\infty[$ pour certains a,b avec $a<-2<0<b$.

Résolvons maintenant algébriquement l'inéquation

$$\frac{1+|x|}{x+2}\leqslant x \tag{5}$$

Distinguons deux cas.

(a) Si $x+2>0$, c'est-à-dire si $x>-2$, (5) est équivalent à $1+|x| \leqslant x(x+2)$, ou encore à $|x| \leqslant x^2+2x-1$. En utilisant le fait que $|x| \leqslant a \Leftrightarrow (-a \leqslant x$ et $x \leqslant a)$, cette dernière inégalité est équivalente à

$$-(x^2+2x-1) \leqslant x \quad \text{et} \quad x \leqslant x^2+2x-1,$$

ou encore

$$x^2+3x-1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x^2+x-1 \geqslant 0. \tag{6}$$

En appliquant la règle disant que le signe d'un polynôme du second degré est celui du coefficient de x^2 à l'extérieur de ses racines et l'opposé à l'intérieur des racines, on trouve le tableau suivant :

x		$\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$		-2		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	
x^2+3x-1	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2+x-1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

La propriété (6) demande de choisir les x pour lesquels les polynômes sont tous deux positifs. Au vu de ce tableau et en tenant compte qu'on travaille avec les $x>-2$, on a que (6) est équivalent à

$$x \in \Big[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\Big[.$$

(b) Si $x+2<0$, (5) est équivalent à $|x| \geqslant x^2+2x-1$, ou encore[1]

$$x^2+3x-1 \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad x^2+x-1 \leqslant 0. \tag{7}$$

Pour satisfaire (7), il suffit donc qu'un des deux polynômes soit négatif. Au vu du tableau ci-dessus et en tenant compte qu'on travaille cette fois avec les $x<-2$, on a que (6) est équivalent à

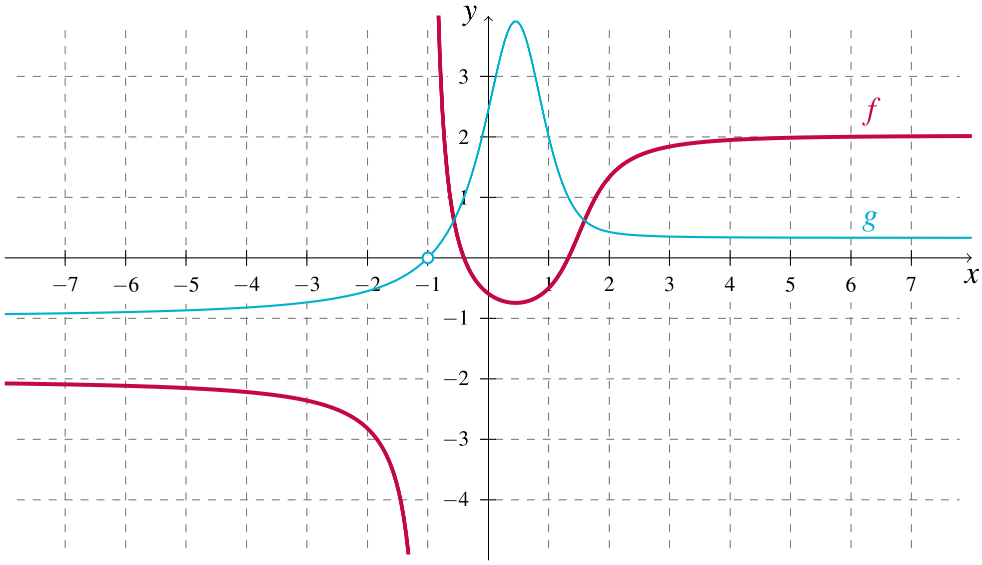
$$x \in \Big[\frac{-3-\sqrt{13}}{2}, -2\Big[.$$

En conclusion, $f(x) \leqslant x$ est satisfait si et seulement si

$$x \in \Big[\frac{-3-\sqrt{13}}{2}, -2\Big[\cup \Big[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\Big[.$$

[1] On utilise ici l'équivalence $|x| \geqslant a \Leftrightarrow (x \leqslant -a$ ou $a \leqslant x)$.

Question 7. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est tracé ci-dessous. Sur ce même graphique, esquissez le graphe de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = 1/\big(f(x)+1\big)$.*



Question 8.

(a) *Prouvez par récurrence que, pour tout naturel n, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.*

(b) *Prouvez que si a est solution de l'équation $X^n = z$, alors $\overline{a}$ est solution de $X^n = \overline{z}$.*

(a) Le cas initial est $n = 0$, c'est-à-dire qu'on doit montrer $\overline{z^0} = \overline{z}^0$. Le premier membre est $\overline{1}$ et le second 1, donc on a l'égalité (le conjugué d'un nombre réel étant ce nombre lui-même).

Pas de récurrence : supposons que la propriété soit vérifiée pour tous les naturels n tels que $0 \leqslant n \leqslant k$. Sous cette hypothèse de récurrence, prouvons la propriété pour $n = k+1$. On a

$$\begin{aligned}
\overline{z^{k+1}} &= \overline{z^k \cdot z} \\
&= \overline{z^k} \cdot \overline{z} && \text{(en utilisant } \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\text{)} \\
&= \overline{z}^k \cdot \overline{z} && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \overline{z}^{k+1}
\end{aligned}$$

(b) Par définition de solution, on a $a^n = z$. Donc, par conjugaison de chaque membre, on a $\overline{a^n} = \overline{z}$ et par (a), on a $\overline{a}^n = \overline{z}$, ce qui, par définition de solution d'une équation, nous dit que $\overline{a}$ est solution de $X^n = \overline{z}$.

Question 9. *Prouvez par récurrence que* $\sum_{i=0}^{\ell}(2i+1) = (\ell+1)^2$.

Le <u>cas initial</u> est $\ell = 0$. On a à vérifier que

$$\sum_{i=0}^{0}(2i+1) = (0+1)^2$$

Le premier membre vaut $2 \cdot 0 + 1 = 1$ et le second membre vaut $(0+1)^2 = 1$. Ceci prouve l'égalité.
<u>Pas de récurrence</u> : Supposons que l'égalité soit vérifiée pour tous les naturels ℓ tels que $0 \leqslant \ell \leqslant k$. Sous cette hypothèse de récurrence, prouvons l'égalité pour $\ell = k+1$. On a

$$\sum_{i=0}^{k+1}(2i+1) = \sum_{i=0}^{k}(2i+1) + 2(k+1) + 1.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient $(k+1)^2 + 2(k+1) + 1 = \big((k+1)+1\big)^2$.