Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (19 octobre 2015)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* ! Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).

Question 1. Calculez /5

- $\displaystyle\sum_{j=-2}^{n} (\boldsymbol{i}+1) =$ avec $n \geqslant -2$.

- $\displaystyle\sum_{j=-2}^{n} 1 =$ avec $n \geqslant -2$.

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} 3 =$ avec $n \geqslant 0$.

- $\displaystyle\sum_{a=2}^{n}\sum_{b=2}^{n} (a^3 - b^3) =$ avec $n \geqslant 2$.

Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (19 octobre 2015)

Nom :
Prénom :
Section :

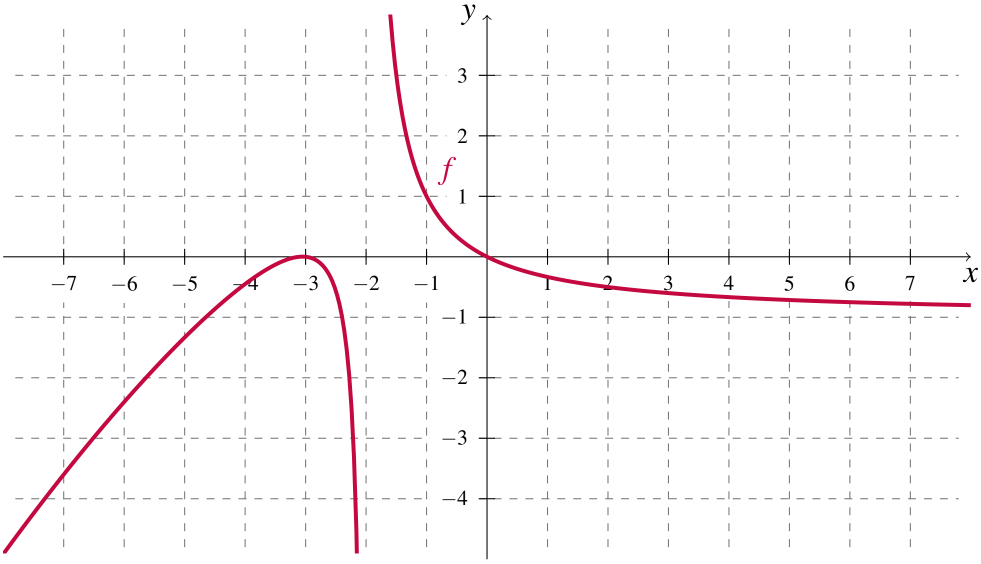
Question 2. /4

(a) Donnez explicitement la matrice $M \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ définie par $M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } |i-j| \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(b) Calculez, si possible,

- $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \end{pmatrix} =$
- $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$
- $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} =$

Question 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est tracé ci-dessous. Sur ce même graphique, esquissez le graphe de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = 1/f(x+1)$. /2



Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (19 octobre 2015)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) := \sin\big(g(\mathrm{e}^x)\big)$ où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable (qu'on ne définit pas précisément). Calculez $\partial_x f(0)$ sachant que $g(0) = \pi/2$, $\partial g(0) = \sqrt{2}$, $g(1) = \mathrm{e}$, $\partial g(1) = -\pi/2$, $\partial g(\pi/2) = 0$. Expliquez votre démarche. /2

Question 5. /4

(a) Donnez la table de vérité de $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$.

(b) Donnez, en bon français, la contraposée de la phrase « Si j'ai oublié de régulariser mon inscription avant le 31 octobre, les points de mes examens seront annulés ».

Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (19 octobre 2015)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. Soient les matrices /3

$$A = \begin{pmatrix} -15 & 3-3\lambda \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

où λ est un paramètre réel. Déterminez la ou les valeurs de λ pour que la formule $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ soit vérifiée.

Nom :
Prénom :
Section :

/5

Question 7. Soit la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{\cos(ax^2)} + \frac{\mathrm{e}^x}{a+x^2}$$

où $a \in \left]0, +\infty\right[$ est un paramètre. Déterminez toutes les valeurs de a telles que la tangente au graphe de f_a au point $\big(0, f_a(0)\big)$ soit parallèle à la droite passant par $\big(-1, f_a(-1)\big)$ et $\big(1, f_a(1)\big)$.

Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (19 octobre 2015)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^2 + \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(1+\boldsymbol{i})X + \frac{1}{4} = 0$. Donnez les solutions sous forme algébrique. $/5$

Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (19 octobre 2015)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9.

/4

(a) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Définissez « A est une matrice symétrique ».

(b) Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par $M_{ij} = (-1)^{i+j}\,(i-j)^2$. La matrice M est-elle symétrique ?

(c) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. On définit la trace de A, notée $\operatorname{tr} A$, par $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$. Calculez la trace de la matrice M.