Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (19 octobre 2015) **Correction**

Question 1. *Calculez*

- $\displaystyle\sum_{j=-2}^{n} (\boldsymbol{i}+1) = (n+3)(\boldsymbol{i}+1)$ *avec* $n \geqslant -2$.

  car $\boldsymbol{i}+1$ est constant par rapport à la variable de sommation.

- $\displaystyle\sum_{j=-2}^{n} 1 = n+3$ *avec* $n \geqslant -2$.

  Même justification qu'au calcul précédent.

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} 3 = n(n+1)3 = 3n(n+1)$ *avec* $n \geqslant 0$.

  car 3 est constant par rapport aux variables de sommation et le tableau comprend $n(n+1)$ positions contenant 3.

- $\displaystyle\sum_{a=2}^{n}\sum_{b=2}^{n} (a^3-b^3) = 0$ *avec* $n \geqslant 2$.

  car la sommation consiste à sommer tous les éléments d'une matrice carrée M antisymétrique (car $M_{ab} := a^3-b^3 = -M_{ba} = -(b^3-a^3)$).

Question 2.

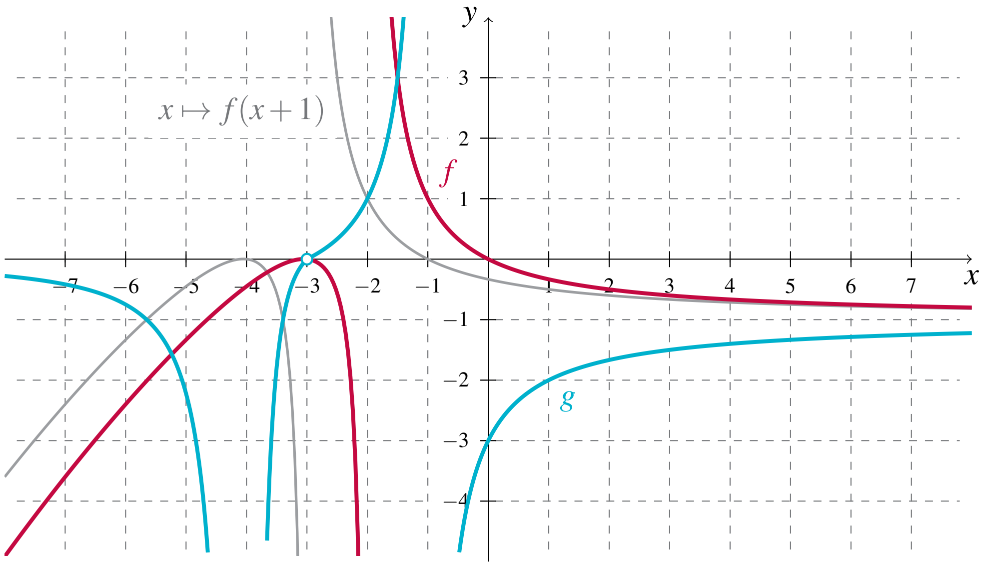
(a) *Donnez explicitement la matrice* $M \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ *définie par* $M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } |i-j| \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) *Calculez, si possible,*

- $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -3 & -12 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -11 & -3 \\ 20 & 19 & 7 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$. Impossible de faire cette multiplication car le nombre de colonnes de la première matrice ($=3$) ne correspond pas au nombre de lignes de la seconde matrice ($=2$).

Question 3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est tracé ci-dessous. Sur ce même graphique, esquissez le graphe de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = 1/f(x+1)$.*



Question 4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) := \sin\big(g(e^x)\big)$ où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable (qu'on ne définit pas précisément). Calculez $\partial_x f(0)$ sachant que $g(0) = \pi/2$, $\partial g(0) = \sqrt{2}$, $g(1) = e$, $\partial g(1) = -\pi/2$, $\partial g(\pi/2) = 0$. Expliquez votre démarche.*

La formule de dérivation des fonctions composées dit que

$$\partial_x f(x) = (\partial_y \sin y)\big|_{y=g(e^x)}\, \partial g(e^x)\, \partial_x e^x = \cos\big(g(e^x)\big)\, \partial g(e^x)\, e^x$$

Par conséquent, $\partial_x f(0) = \cos(g(1)) \cdot \partial g(1) = \cos e \cdot (-\pi/2) = -\frac{1}{2}\pi \cos e$.

Question 5.

(a) *Donnez la table de vérité de $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$.*

(b) *Donnez, en bon français, la contraposée de la phrase « Si j'ai oublié de régulariser mon inscription avant le 31 octobre, les points de mes examens seront annulés ».*

(a)

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

(b) La contraposée d'une proposition de la forme $A \Rightarrow B$ est $\neg B \Rightarrow \neg A$, donc en bon français : « Si les points de mon examen n'ont pas été annulés, (alors) c'est que je n'ai pas oublié de régulariser mon inscription avant le 31 octobre ».

Question 6. *Soient les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} -15 & 3-3\lambda \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

où λ est un paramètre réel. Déterminez la ou les valeurs de λ pour que la formule $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ soit vérifiée.

On a $(A-B)\cdot(A+B) = A\cdot A + A\cdot B - B\cdot A + B\cdot B = A^2 + A\cdot B - B\cdot A + B^2$. La formule $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ est donc vérifée si et seulement si $AB = BA$. On calcule

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} -15 & 3-3\lambda \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 & 15-15\lambda \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$
$$\text{et} \quad B\cdot A = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -15 & 3-3\lambda \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 & -36+36\lambda \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Par définition de l'égalité entre deux matrices, on a

$$\begin{aligned} AB = BA \quad &\Leftrightarrow \quad 15 - 15\lambda = -36 + 36\lambda \\ &\Leftrightarrow \quad 51 = 51\lambda \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \end{aligned}$$

La formule est donc vérifiée lorsque $\lambda = 1$.

Question 7. *Soit la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f_a(x) = e^{\cos(ax^2)} + \frac{e^x}{a + x^2}$$

où $a \in \left]0, +\infty\right[$ est un paramètre. Déterminez toutes les valeurs de a telles que la tangente au graphe de f_a au point $\big(0, f_a(0)\big)$ soit parallèle à la droite passant par $\big(-1, f_a(-1)\big)$ et $\big(1, f_a(1)\big)$.

La pente de la tangente au graphe de f_a en $x = 0$ est donnée par $\partial_x f_a(0)$. On calcule que

$$\begin{aligned} \partial_x f_a(x) &= e^{\cos(ax^2)} \cdot (-\sin(ax^2)) \cdot 2ax + \frac{e^x \cdot (a + x^2) + e^x 2x}{(a+x^2)^2} \\ &= -2ax \sin(ax^2) e^{\cos(ax^2)} + \frac{x^2 + 2x + a}{(a+x^2)^2} e^x \end{aligned}$$

On trouve donc $\partial_x f_a(0) = a/a^2 = 1/a$. Par ailleurs, la pente de la droite passant par $\bigl(-1, f_a(-1)\bigr)$ et $\bigl(1, f_a(1)\bigr)$ vaut[1]

$$\frac{f_a(1) - f_a(-1)}{1-(-1)} = \tfrac{1}{2}\Bigl(\mathrm{e}^{\cos a} + \frac{\mathrm{e}}{a+1} - \mathrm{e}^{\cos a} - \frac{\mathrm{e}^{-1}}{a+1}\Bigr) = \frac{\sinh \mathrm{e}}{a+1}$$

Les deux droites (non verticales) sont parallèles si et seulement si leurs pentes sont égales, c'est-à-dire si $\frac{1}{a} = \frac{\sinh \mathrm{e}}{a+1}$. En résolvant cette équation, on en déduit que le parallélisme a lieu si et seulement si $a = 1/(\sinh \mathrm{e} - 1)$.

On remarque que cette solution est acceptable (i.e. $a \in \,]0, +\infty[$) vu que $\sinh \mathrm{e} - 1 > 0$. En effet, en multipliant par e, on trouve que cette inégalité est équivalente à $\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - 1 > 0$. Elle est vérifiée si e est à l'extérieur des racines du polynôme $x^2 - x - 1$, à savoir $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. C'est bien le cas : $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2 < \mathrm{e}$.

Question 8. *Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^2 + \dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(1+\boldsymbol{i})X + \dfrac{1}{4} = 0$. Donnez les solutions sous forme algébrique.*

Le discriminant de l'équation est

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(1+\boldsymbol{i})\right)^2 - 4\cdot 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2\boldsymbol{i}) - 1\\ &= -1 + \boldsymbol{i}\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

L'équation auxiliaire est donc $Y^2 = 2\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$ et ses solutions sont $y_1 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$ et $y_2 = -\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$, ou encore sous forme algébrique : $y_1 = \sqrt{2}\bigl(\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\bigr)$ et $y_2 = -\sqrt{2}\bigl(\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\bigr)$. Donc par les formules vues au cours, les solutions de l'équation de départ sont $x_1 = -\frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{2}}(1+\boldsymbol{i}) + \bigl(\frac{\sqrt{2}}{4} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{6}}{4}\bigr)$ et $x_2 = -\frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{2}}(1+\boldsymbol{i}) - \bigl(\frac{\sqrt{2}}{4} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{6}}{4}\bigr)$. Ou encore,

$$x_1 = -\frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \left(-\frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right)\boldsymbol{i} \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \left(-\frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{6}}{4}\right)\boldsymbol{i}.$$

[1] On rappelle que le *sinus hyperbolique* est défini comme $\operatorname{sh} x = \sinh x := \frac{1}{2}\bigl(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\bigr)$.

Question 9.

(a) *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Définissez « A est une matrice symétrique ».*

(b) *Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par $M_{ij} = (-1)^{i+j}(i-j)^2$. La matrice M est-elle symétrique ?*

(c) *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. On définit la trace de A, notée $\operatorname{tr} A$, par $\operatorname{tr} A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_{ii}$. Calculez la trace de la matrice M.*

(a) A est symétrique si $A^t = A$.

(b) La matrice M est symétrique si $M^t = M$, par (a), ou encore si $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $M^t_{ij} = M_{ij}$. Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. On a :

$$\begin{aligned}
M^t_{ij} &= M_{ji} && \text{(par définition de transposée)}\\
&= (-1)^{j+i}(j-i)^2 && \text{(par définition de } M\text{)}\\
&= (-1)^{i+j}\big(-(i-j)\big)^2\\
&= (-1)^{i+j}(i-j)^2\\
&= M_{ij}.
\end{aligned}$$

Donc M est symétrique.

(c) On a $\operatorname{tr} M = \sum_{i=1}^{n} M_{ii}$. Or, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $M_{ii} = (-1)^{i+i}(i-i)^2 = 0$.
Donc $\operatorname{tr} M = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$.