Mathématique Élémentaire

Examen (31 octobre 2016)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* ! Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Ni calculatrice, ni téléphone ne sont autorisés sous peine d'exclusion de l'examen. Votre téléphone doit être en mode silencieux dans votre sac.
- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).

Question 1. Donnez la contraposée et la négation de la phrase suivante en bon français : « Si je rate le test final de Mathématique Élémentaire, alors je dois passer l'examen de Mathématique Élémentaire en janvier ». Justifiez en donnant les tables de vérité de l'implication, de la contraposée et de la négation de l'implication. /4

A	B		implication	contraposée	négation

Mathématique Élémentaire

Examen (31 octobre 2016)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $/4$

$$f(x) = \left(1+x+x^2\right)^{3/2} + \operatorname{arctg} \mathrm{e}^{\alpha x}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Déterminez toutes les valeurs de α telles que la tangente au graphe de f en $(0, f(0))$ est parallèle à la droite D d'équation paramétrique $(x,y) = (0,\pi) + \lambda(\alpha,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Question 3. Donnez la forme trigonométrique de $/3$

- $(1+\boldsymbol{i})^3 =$
- $\sqrt{6} + \sqrt{2}\boldsymbol{i} =$
- $-3\operatorname{cis}\left(\frac{14}{5}\pi\right) =$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4.

/4

(a) Donnez la fonction du premier degré dont le graphe est la droite D passant par le point $(5,-4)$ et parallèle à la droite D' dont une équation paramétrique est $(x,y) = (\lambda, 42\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Soit la droite D passant par le point $(4,3)$ et par le milieu du segment joignant les points $(1,-1)$ et $(9,3)$. Montrez que la droite D est perpendiculaire au segment.

Mathématique Élémentaire

Examen (31 octobre 2016)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. Calculez $\big/ 6$

- $(1+\boldsymbol{i})^2(1-\boldsymbol{i})^3 =$

- $(2-7\boldsymbol{i})+(\frac{3}{2}\boldsymbol{i}-4) =$

- $|\sqrt{6}-\boldsymbol{i}| =$

- $\overline{\boldsymbol{i}+\sqrt{6}} =$

- $\left|\overline{(\sqrt{6}-\boldsymbol{i})^4}\right| =$

- $(1+\boldsymbol{i})^6 =$

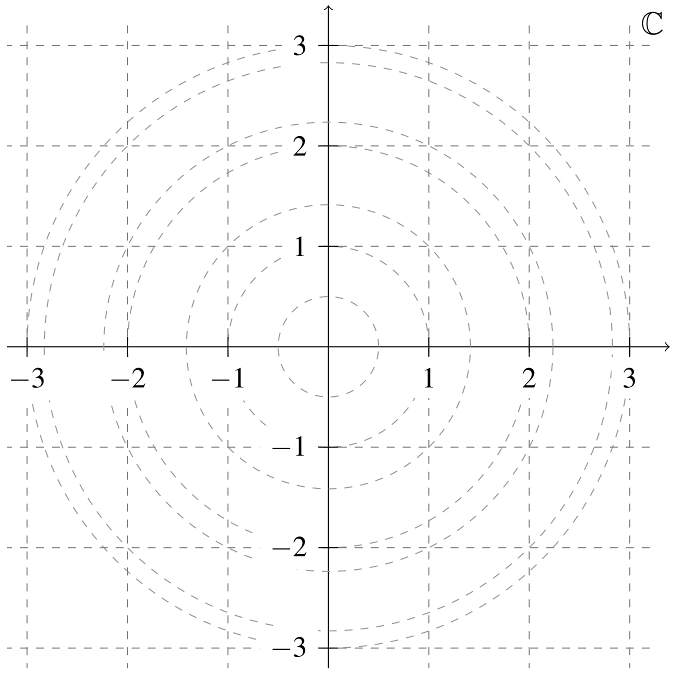
Question 6. Calculez : $\big/ 4$

- $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} (1+x)\mathrm{e}^x \ln x \,\mathrm{d}x =$

- $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sin(\ln z)}{z} \,\mathrm{d}z =$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^6 = -8\boldsymbol{i}$. Donnez les solutions sous forme trigonométrique et placez les dans le plan complexe représenté ci-dessous. $/5$



Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. Donnez la table de vérité de $(P_1 \vee P_2) \wedge \neg P_3$ et prouvez que $(P_1 \vee P_2) \wedge \neg P_3$ est équivalent à $(P_1 \wedge \neg P_3) \vee (P_2 \wedge \neg P_3)$. /3

Question 9. Calculez /4

- $\sum_{i=0}^{n} (3i^2 - t) =$

- $\sum_{t=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} (i - t) =$

- $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{n} (i - j) =$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Montrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

/3

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11. Donnez l'ensemble des solutions de l'inéquation

/5

$$\sqrt{\frac{x-3}{|x|+2}} \leqslant \sqrt{x+3} \tag{1}$$

sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12. /5

(a) Donnez, si possible, la matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telle que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Il est impératif d'utiliser la méthode de la matrice compagnon pour répondre à cette question. Expliquez votre démarche.

(b) Déduisez du point précédent l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} -3x+2y = 19 \\ -2x+4y-2z = 0 \\ x-y+5z = -38. \end{cases}$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 13. Calculez, si possible,

/4

(a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$

(b) $\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}^{-1} =$

(c) $\begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & u & -v \\ 0 & v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -y \\ 0 & 0 & y & x \end{pmatrix} =$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & b & 1 \\ b & 1 & a \end{vmatrix} =$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 14. Pour quelle(s) valeur(s) des paramètres $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, le vecteur $(1, 2, 3, 4)$ est-il solution du système

/5

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ 2ax_1 + bx_2 - 3dx_4 = 0 \\ -3ax_1 - 2bx_2 + 5cx_3 - dx_4 = 0. \end{cases}$$

Expliquez votre démarche.