

Mathématique Élémentaire

Examen

(18 janvier 2017)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Veillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* ! Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Ni calculatrice, ni téléphone ne sont autorisés sous peine d'exclusion de l'examen. Votre téléphone doit être en mode silencieux dans votre sac.
- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).

Question 1. Calculez et exprimez le résultat final sous forme trigonométrique.

■ $\overline{1-i} =$

■ $(3-3i)^{-1} =$

■ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

/3

Question 2.

/6

(a) Prouvez par récurrence que, pour $n \geq 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\left(\sum_{\ell=0}^n t^\ell \right) (1-t) = 1 - t^{n+1}$$

(b) Calculez $\sum_{\ell=0}^{4n} i^\ell$ où $i^2 = -1$. Expliquez et justifiez votre démarche.

Question 3.

/5

(a) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Définissez « B est l'inverse de A ».

(b) Soit la matrice $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Dites sous quelle condition la matrice S est inversible. Donnez alors l'inverse de S et vérifiez votre réponse en utilisant le point précédent.

(c) Résolvez le système suivant en fonction de $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \cos \theta x - \sin \theta y = 1 \\ \sin \theta x + \cos \theta y = 1 \end{cases}$$

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 3 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 4.

(a) Donnez la table de vérité de $(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)$.

(b) La réciproque de la formule précédente est-elle une tautologie ?

/2

Question 5. Donnez l'ensemble des solutions de l'inéquation

/5

$$\sqrt{\frac{x+3}{|x|+2}} \leq \sqrt{x-3} \quad (1)$$

sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).

Question 6. Calculez

■ $\int_0^1 \frac{1}{x} \ln x dx =$

/4

■ $\int_0^{\ln \pi} e^{2x} \sin(e^x) dx =$

Question 7. Soient trois nombres réels x , $a \neq 0$ et t . Prouvez l'équivalence suivante :

$$1 - t \leq \frac{x}{a} \leq 1 + t \Leftrightarrow |x - a| \leq t|a|.$$

/2

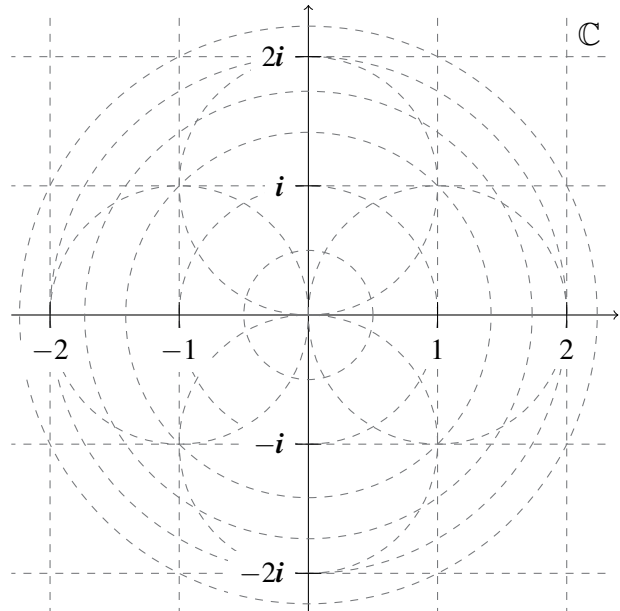
Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 8. Dans le corps des complexes, résolvez l'équation suivante de manière algébrique et graphique.

/7

$$X^6 + 27 = 0$$

Veillez à la qualité de vos explications.



Question 9. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \quad \text{où } m \in \mathbb{R}.$$

/5

- (a) Calculez $\det A$. Pour quelles valeurs de m peut-on calculer A^{-1} ?
- (b) En utilisant la méthode de la matrice compagnon, calculez, si possible, l'inverse de A pour $m = -3$. Expliquez votre démarche.
- (c) Pour le ou les m qui annulent $\det A$, donnez l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 10. Calculez, en explicitant vos calculs :

/4

■ $\sum_{u=0}^{\ell} (u + 1) =$

■ $\sum_{n=2}^t 2 =$

■ $\sum_{u=1}^n \sum_{v=1}^n (u - v)^2 =$

Question 11. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \operatorname{arctg}(e^{4x}).$$

Déterminez l'ensemble des points $a \in \operatorname{Dom} f$ tels que l'angle entre la tangente au graphe de f en $(a, f(a))$ et l'axe des y appartienne à l'intervalle $[\pi/4, \pi/2]$.

/4

Question 12. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.

/6

(a) Vrai : Faux : Le point $(\frac{1}{4}, \frac{7}{2})$ appartient à la droite $D \equiv (x, y) = (-5, 0) + \lambda(-3, -2)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Vrai : Faux : Le vecteur $(\pi^{-1}, 2\pi^{-1})$ est un vecteur directeur de la droite $D \equiv x = y/2 - 5$.

(c) Vrai : Faux : Les droites $D_1 \equiv (x, y) = (7, -1) + \mu(-3, -2)$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $D_2 \equiv -4x + 6y = 1$ sont confondues.