

Mathématiques Élémentaires

Examen

(29 mai 2017)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles.
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !
- Il est interdit d'avoir son téléphone sur soi — il doit être en mode silencieux dans votre sac.

Le non respect de ces consignes sera pénalisé.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veuillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).

Question 1.

(a) Donnez la table de vérité de $A \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow (B \wedge \neg C)$.

(b) Donnez, en bon français, la négation de la proposition suivante : « si $\sqrt{2}$ est rationnel, alors $1 + \sqrt{2}$ est rationnel ».

/4

Question 2. Calculer les sommes suivantes :

■ $\sum_{i=-2}^k 2 =$

■ $\sum_{i=-2}^t (2 + i^2 + j) =$

/3

Question 3. Écrivez sous forme trigonométrique $8 - (8\sqrt{3})i$.

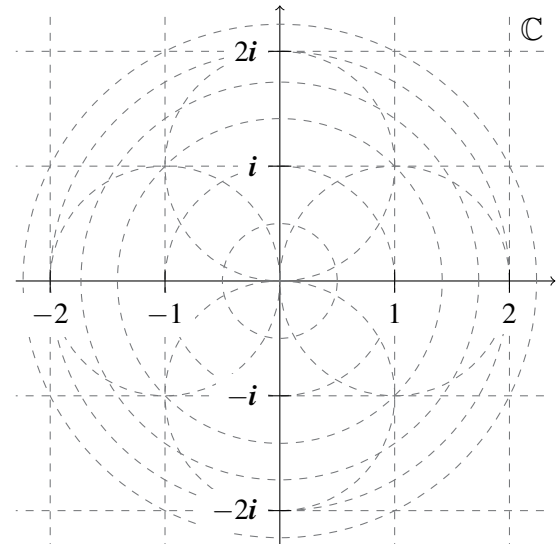
/3

Mettez sous la forme $a + bi$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, le nombre complexe $\frac{2 - 4i}{4 - 3i}$.

Calculez $\left| \frac{(2 - 4i)^2}{4 - 3i} \right|$.

Question 4. Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation $X^3 = -8$. Donnez les solutions sous les formes $a + bi$ et trigonométrique. Représentez ces solutions dans le plan complexe.

/6



Question 5.

■ Calculez $\int_0^\pi x(1 + \sin x^2) dx =$

■ En utilisant une intégration par parties, calculez $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx =$

Question 6. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq f(n+1)$. Montrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq f(n+k)$.

/4

/4

Question 7. Écrivez l'ensemble

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{|x| - 1} - |x| + 2 > 0 \right\}$$

sous la forme d'une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est).

/4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 8. Soient les matrices

/4

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = (\sqrt{2} \quad -2 \quad 5), \quad C = ((-1)^{i+j})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$$

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ ab & 0 & 0 \\ b & a & b \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ca & b & c^2 \end{pmatrix}.$$

Calculez BA , $\det C$ et $\det(ED)$.

Question 9. Soit le système

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 1, \\ x + \lambda y - z = 1, \\ -x + y + \lambda z = 1, \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

- (a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède-t-il une solution unique ?
- (b) Soit $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de A pour $\lambda = -3$.
- (c) En utilisant le point (b), résolvez le système lorsque $\lambda = -3$. Expliquez votre démarche.
- (d) Résolvez le système lorsque $\lambda = 0$ et lorsque $\lambda = 1$.

/ 10

Mathématiques Élémentaires

Examen

(29 mai 2017)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Mathématiques Élémentaires

Examen

(29 mai 2017)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 9 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 10. Pour quelle(s) valeur(s) de $p, q \in \mathbb{R}$, les droites tangentes au graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto px^4 + x^2 + qx$ en $x = 0$ et en $x = 1$ sont-elles confondues.

/5