

Mathématiques Élémentaires

Examen

(19 août 2017)

Nom : _____
Prénom : _____
Section : _____

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles.
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !
- Il est interdit d'avoir son téléphone sur soi — il doit être en mode silencieux dans votre sac.

Le non respect de ces consignes sera pénalisé.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veuillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).

Question 1. Calculez :

■ $\int_0^1 (x+1)e^{2x} dx =$

■ $\int_0^\pi \sin(x) \ln(\cos x + 2) dx =$

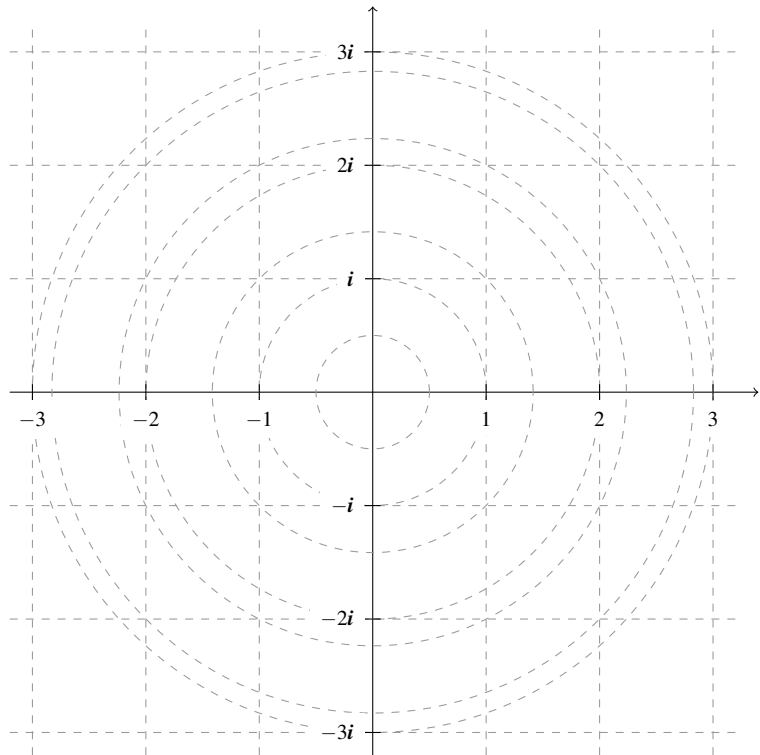
/4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2. Résolvez dans \mathbb{C} l'équation $X^6 = 125i$.

- Donnez les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.
- Placez ces solutions dans le plan schématisé ci-dessous.

/8



Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 3. Déterminez l'ensemble des valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la tangente au graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{\arctg(\alpha x)}$ au point $(1, f(1))$ soit perpendiculaire à la droite D d'équation $x \arctg 1 = y \arctg \alpha$. (AIDE : $\alpha \arctg \alpha \geq 0$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$.)

/4

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 4. Donnez l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui satisfont l'inéquation

$$\frac{1}{x + \sqrt{x} - 2} > \frac{-2}{x + 1}$$

sous la forme d'une union minimale d'intervalles.

/6

Mathématiques Élémentaires

Examen

(19 août 2017)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 5.

/4

- (a) Donnez la fonction du premier degré dont le graphe est la droite D passant par le point $(5, -4)$ et parallèle à la droite D' dont une équation paramétrique est $(x, y) = (\lambda, 42\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (b) Soit la droite D passant par le point $(4, 3)$ et par le milieu du segment joignant les points $(1, -1)$ et $(9, 3)$. Montrez que la droite D est perpendiculaire au segment.

Question 6. Donnez en bon français la négation de « Si je vais en vacances, alors j'apprends l'anglais ». Justifiez votre réponse.

/2

Question 7. Calculez

■ $(4 - i)^{-1} =$

■ $\frac{2 - 3i}{4 - 3i} =$

■ $\overline{-12i + 40} =$

■ $|(2 - i)^2 \cdot (3 + i)^4| =$

/2

Question 8. La proposition suivante est-elle une tautologie ?

$$((P \wedge \neg Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \vee R))$$

Justifiez votre réponse.

/3

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9. Calculez

■ $\sum_{s=-4}^v s(s+2) =$

■ $\sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=2}^{\ell} (j^2 - i^2 + 1) =$

/3

Question 10. Prouver par récurrence sur k que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\partial_x^k \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad (1)$$

où, pour rappel, le symbole « ∂_x^k » signifie qu'on dérive l'expression k fois par rapport à x .

/4

Question 11. Soit le système

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 1, \\ x + \lambda y - z = 1, \\ -x + y + \lambda z = 1, \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

- (a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède-t-il une solution unique?
- (b) Soit $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de A pour $\lambda = -3$.
- (c) En utilisant le point (b), résolvez le système lorsque $\lambda = -3$. Expliquez votre démarche.
- (d) Résolvez le système lorsque $\lambda = 0$ et lorsque $\lambda = 1$.

/ 10

Mathématiques Élémentaires

Examen

(19 août 2017)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 11 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 11 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 12. Calculez, si possible,

/4

(a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$

(b) $\begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}^{-1} =$

(c) $\begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & u & -v \\ 0 & v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -y \\ 0 & 0 & y & x \end{pmatrix} =$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & b & 1 \\ b & 1 & a \end{vmatrix} =$