Mathématique Élémentaire

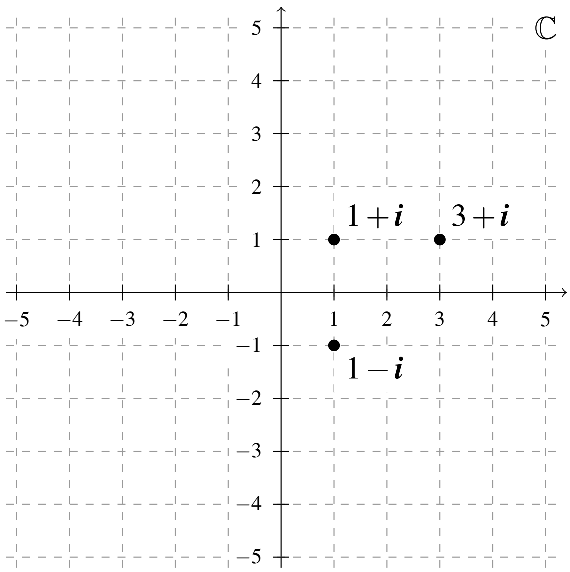
Test n° 2 (26 septembre 2016) **Correction**

Question 1. *Calculer*

- $(3+\boldsymbol{i})+(5-7\boldsymbol{i}) = (3+5)+(1-7)\boldsymbol{i} = 8-6\boldsymbol{i}$
- $(3+\boldsymbol{i})-\left(\frac{5}{2}+\frac{2}{3}\boldsymbol{i}\right) = (3-\frac{5}{2})+(1-\frac{2}{3})\boldsymbol{i} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\boldsymbol{i}$
- $(3+\boldsymbol{i})\cdot\left(\frac{5}{2}+\frac{2}{3}\boldsymbol{i}\right) = (3\cdot\frac{5}{2}-1\cdot\frac{2}{3})+(\frac{5}{2}+3\cdot\frac{2}{3})\boldsymbol{i} = \frac{41}{6}+\frac{9}{2}\boldsymbol{i}$
- $\overline{-4\boldsymbol{i}+7} = \overline{7-4\boldsymbol{i}} = 7+4\boldsymbol{i}$
- $|1+\boldsymbol{i}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
- $|1-\boldsymbol{i}| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$
- $|(1-\boldsymbol{i})^3| = |1-\boldsymbol{i}|^3$ car on a vu au cours que $|z^3| = |z|^3$
  $= (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$

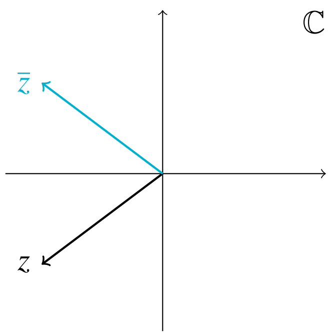
Question 2.

(a) *Dans le plan ci-dessous, représentez* $3+\boldsymbol{i}$, $1-\boldsymbol{i}$, $1+\boldsymbol{i}$.



(b) *Pour le complexe* z *qui est dessiné ci-dessous, représentez* $\bar{z}$. *Expliquez votre démarche.*

Si $z = a+b\boldsymbol{i}$, on a par définition, $\bar{z} = a-b\boldsymbol{i}$. Sur le plan, z est représenté par le couple (a,b) et $\bar{z}$ est représenté par le couple $(a,-b)$ qui est le symétrique de (a,b) par rapport à l'axe X.



Question 3. *Soit* $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

(a) *Complétez les phrases suivantes :*

$v = 0$	*ssi*	$v_1 = 0$ et $v_2 = 0$
$v \neq 0$	*ssi*	$v_1 \neq 0$ ou $v_2 \neq 0$

(b) *Soit* $u \in \mathbb{R}^2$ *le vecteur défini par* $u = (\lambda^3 - \lambda^2, \lambda^2 + \lambda)$ *où* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Pour quelle(s) valeur(s) de* λ *a-t-on* $u = 0$ *? Expliquez votre raisonnement et détaillez vos calculs.*

Voir correction du test 2, 23 septembre 2013, question 7.

Question 4.

(a) *Soient les vecteurs* $u = (-2, 5, 1, -7)$ *et* $v = (1, 0, 4, -3)$. *Calculer*

- $(u \mid 2v) = \big((-2,5,1,-7) \mid (2,0,8,-6)\big) = -2 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 8 - 7 \cdot (-6) = -4 + 8 + 42 = 46$.
- $\|u + v\| = \|(-2+1, 5+0, 1+4, -7-3)\| = \|(-1, 5, 5, -10)\| = \sqrt{1 + 25 + 25 + 100} = \sqrt{151}$

(b) *Soient* $x = (x_1, x_2)$ *et* $y = (y_1, y_2)$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^2$. *Montrez que* $\|x - y\| = \|y - x\|$. *Veuillez citer les définitions et les résultats que vous utilisez.*

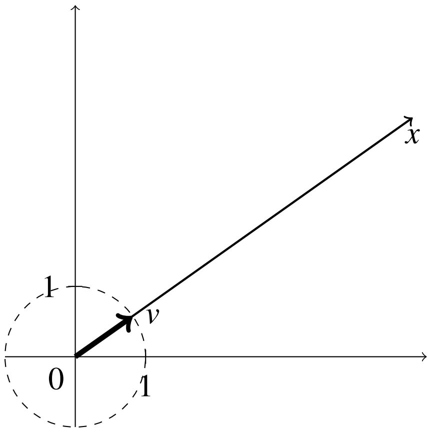
$$
\begin{aligned}
\|x - y\| &= \|(x_1 - y_1, x_2 - y_2)\| && \text{par définition de l'addition dans } \mathbb{R}^2 \\
&= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} && \text{par définition de la norme} \\
&= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} && \text{car } \forall x \in \mathbb{R}, (-x)^2 = x^2 \\
&= \|(y_1 - x_1, y_2 - x_2)\| && \text{par définition de la norme} \\
&= \|y - x\|.
\end{aligned}
$$

Autre possibilité : On a $y - x = (-1) \cdot (x - y)$. Donc

$$
\begin{aligned}
\|y - x\| &= \|-1 \cdot (x - y)\| \\
&= |-1| \cdot \|x - y\| && \text{car } \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall v \in \mathbb{R}^2,\ \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \\
&= \|x - y\| && \text{car } |-1| = 1.
\end{aligned}
$$

(c) *Soit $x \in \mathbb{R}^2$ le vecteur représenté ci-dessous. Construisez, sur ce même graphique, le vecteur $v = x/\|x\|$. Expliquez comment vous réalisez votre construction.*

Comme $\|v\| = 1$ (vu au cours) et que $v = x/\|x\|$ a même direction et même sens que x (puisque $\|x\| > 0$), v est le vecteur d'origine $(0,0)$, de même direction et même sens que x et dont l'extrémité est sur le cercle unité.



Question 5. *Soit la droite $D \equiv (x,y) = (-4,3) + \lambda(-2,7)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(a) *Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.*

(i) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *Le point $\left(-\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$ appartient à la droite D.*

On a $\left(\frac{-10}{3}, \frac{2}{3}\right) \in D$ si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \left(\frac{-10}{3}, \frac{2}{3}\right) = (-4,3) + \lambda(-2,7) \qquad (1)$$

Or cette égalité peut s'écrire $(\frac{-10}{3}, \frac{2}{3}) = (-4-2\lambda, 3+7\lambda)$. On en déduit que $\frac{-10}{3} = -4-2\lambda$ et $\frac{2}{3} = 3+7\lambda$. La première égalité dit que $\frac{2}{3} = -2\lambda$, c'est-à-dire $\lambda = \frac{-1}{3}$ et la deuxième égalité donne $7\lambda = \frac{-7}{3}$ c'est-à-dire $\lambda = \frac{-1}{3}$. L'affirmation est donc vraie, il suffit de prendre $\lambda = \frac{-1}{3}$ dans (1).

(ii) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *Le vecteur $\left(\frac{2\pi}{7}, -\pi\right)$ est un vecteur directeur de D.*

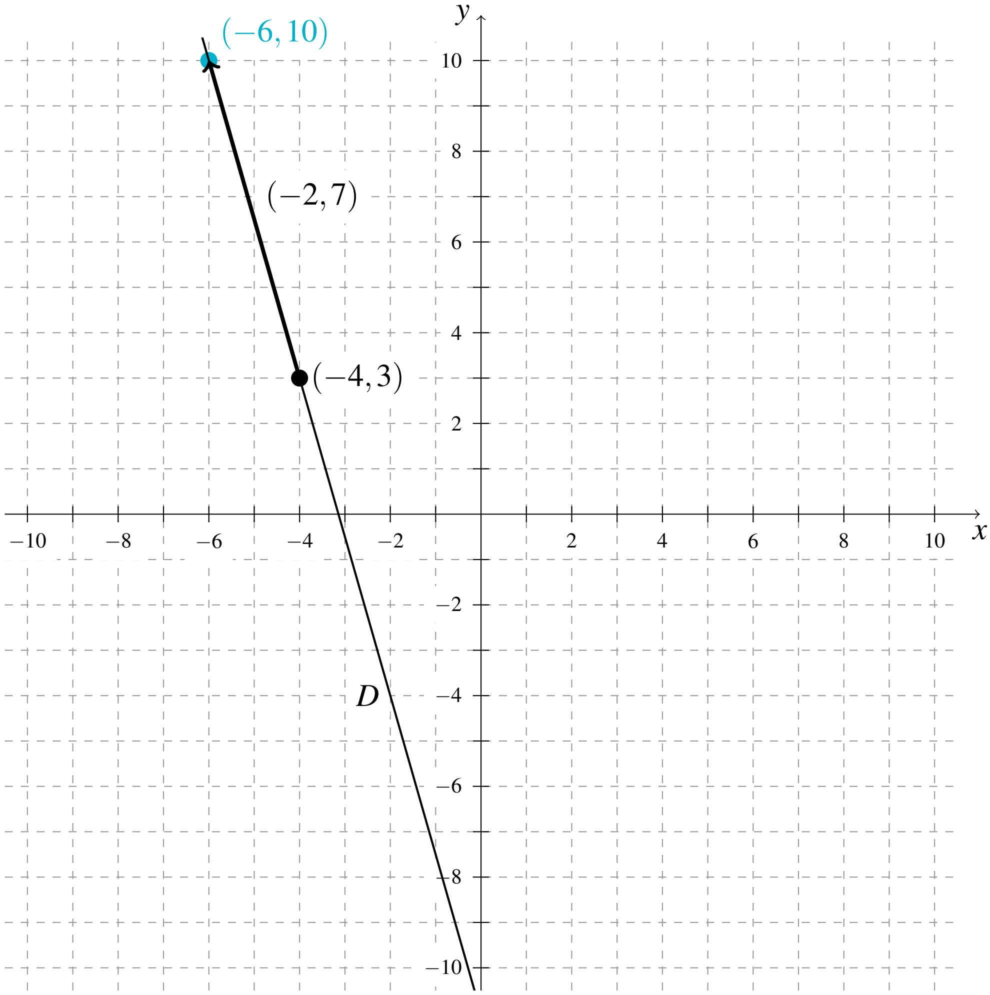
Un vecteur directeur de D est $(-2,7)$. Tout vecteur colinéaire à $(-2,7)$ est encore un vecteur directeur de D. Or $(\frac{2\pi}{7}, -\pi) = \frac{-\pi}{7}(-2,7)$. Les vecteurs $(-2,7)$ et $(\frac{2\pi}{7}, -\pi)$ sont donc colinéaires et donc $(\frac{2\pi}{7}, -\pi)$ est bien un vecteur directeur de D.

(b) *Représentez graphiquement la droite D dans le repère ci-dessous. Expliquez votre démarche.*

On constate que $(-4,3)$ est un point de D. On l'obtient en prenant $\lambda = 0$ dans l'équation.

En prenant par exemple $\lambda = 1$, on obtient un autre point de D : on a

$$(x,y) = (-4,3) + (-2,7) = (-6,10).$$



Question 6.

(a) *Prouvez que, pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.*

(b) *À partir de (a), prouvez que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{z^4} = \overline{z}^4$.*

(a) Posons $z_1 = a + b\boldsymbol{i}$ et $z_2 = c + d\boldsymbol{i}$. Par définition du conjugué, le premier membre est égal à

$$\overline{(a+b\boldsymbol{i})(c+d\boldsymbol{i})} = \overline{ac - bd + (ad+bc)\boldsymbol{i}} = ac - bd - (ad+bc)\boldsymbol{i}.$$

Toujours par définition du conjugué, le second membre est égal à

$$(a - b\boldsymbol{i}) \cdot (c - d\boldsymbol{i}) = ac - bd + \big(a(-d) + (-b)c\big)\boldsymbol{i},$$

ce qui est égal au premier membre, vu les propriétés des opérations dans $\mathbb{R}$.

(b) On a $z^4 = z^2 \cdot z^2$. Par le point (a), on a donc $\overline{z^4} = \overline{z^2} \cdot \overline{z^2}$. Toujours par le point (a), on a $\overline{z^2} = \overline{z} \cdot \overline{z}$. Ce qui donne finalement

$$\overline{z^4} = (\overline{z} \cdot \overline{z})(\overline{z} \cdot \overline{z}) = \overline{z}^4.$$

Question 7. *Prouvez que* $1-\boldsymbol{i}$ *est solution (dans* $\mathbb{C}$*) de l'équation* $X^2-2X+2=0$.

Par définition de « $1-\boldsymbol{i}$ est solution de l'équation », cela revient à vérifier que

$$(1-\boldsymbol{i})^2-2(1-\boldsymbol{i})+2=0,$$

ou encore à vérifier que

$$(1-\boldsymbol{i})(1-\boldsymbol{i}-2)+2=0,$$

c'est-à-dire $-(1-\boldsymbol{i})(1+\boldsymbol{i})+2=0$. Cette égalité est vraie puisque $(1-\boldsymbol{i})(1+\boldsymbol{i})=1-\boldsymbol{i}^2=2$.

Question 8. *Résoudre, dans* $\mathbb{C}$*, l'équation* $3X^2-\boldsymbol{i}X+4=0$.

Le discriminant de l'équation est, par définition, $\Delta=(-\boldsymbol{i})^2-4\cdot3\cdot4=-1-48=-49$. L'équation auxiliaire associée à l'équation est donc $Y^2=-49$, dont les solutions dans $\mathbb{C}$ sont $y_1=\boldsymbol{i}\sqrt{49}=7\boldsymbol{i}$ et $y_2=-7\boldsymbol{i}$.
Il s'ensuit par la théorie vue au cours que les solutions de l'équation $3X^2-\boldsymbol{i}X+4=0$ sont

$$x_1=\frac{-(-\boldsymbol{i})+7\boldsymbol{i}}{6}=\frac{8\boldsymbol{i}}{6}=\frac{4\boldsymbol{i}}{3} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{i}}{6}=-\boldsymbol{i}.$$